UNIVERSIDAD NACIONAL
DE INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA
Departamento Académica de Ciencias Básicas, Humanidades y Cursos Complementarios

METODOS NUMERICOS (MB –536)

SOLUCION DE SISTEMAS LINEALES
METODOS ITERATIVOS

Profesores:
Garrido Juárez, Rosa
Castro Salguero, Robert
Obregón Ramos, Máximo

2009-1

Métodos Iterativos para la Solución de Sistemas Lineales

Sean los Sistemas Lineales $Ax = b$ donde:

A Matriz de coeficientes $n \times n$
x Vector de variables $n \times 1$
b Vector independiente (constantes) $n \times 1$

Idea general de los Métodos Iterativos

Convertir el sistema de ecuaciones $Ax = b$ en un proceso iterativo $x = Tx + c = \varphi(x)$, donde:

T Matriz con dimensiones $n \times n$
c Vector con dimensiones $n \times 1$
$\varphi(x)$ Función de iteración matricial

Esquema Iterativo Propuesto

Partiendo de un vector de aproximación inicial $x^{(o)}$, se construye una secuencia iterativa de vectores:

$$\begin{gathered} x^{(1)} = Tx^{(o)} + c = \varphi(x^{(o)}) \\ x^{(2)} = Tx^{(1)} + c = \varphi(x^{(1)}) \\ \vdots \\ x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c = \varphi(x^{(k-1)}) \end{gathered}$$

Forma General

$$\boxed{x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})}$$

Observación

Si la secuencia de aproximación $\underline{x}^{(o)}$, $\underline{x}^{(1)}$, $\underline{x}^{(2)}$, ..., $\underline{x}^{(k)}$ es tal que $\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = T\alpha + c$, entonces α es la solución del sistema $Ax = b$.

Criterios de Parada

Como en todos los procesos iterativos, se necesita de un criterio para finalizar el proceso.

a) **Máximo error absoluto**:

$$\varepsilon^{(k)} = \max_{i=1,n} \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right|$$

b) **Máximo error relativo**:

$$\delta^{(k)} = \frac{\varepsilon^{(k)}}{\max_{i=1,n} \left| x_i^{(k)} \right|}$$

c) El **error de sucesión** de $\bar{x}$ por $x^{(k)}$, $\bar{x}$ - $x^{(k)}$,satisfacen

$$\varepsilon^{(k)} = \left\|\bar{x} - x^{(k)}\right\|_\infty \leq \frac{\|T\|_\infty}{1-\|T\|_\infty}\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_\infty, \quad k=1,2,...$$

De esta forma, dada una precisión TOL, el vector $x^{(k)}$, será escogido como solución aproximada de la solución exacta, si $\varepsilon^{(k)} < TOL$, o dependiendo de, $\delta^{(k)} < TOL$.

Método Iterativo de Jacobi

Considere el siguiente sistema Lineal:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ...+ a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ...+ a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ...+ .a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Suponga $a_{ii} \neq 0, \quad i = 1,2,...,n$, despejando el vector $\underline{x}$ mediante:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - ....- a_{1n}x_n^{(k)})$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - ....- a_{2n}x_n^{(k)})$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - ....- a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)})$$

Así mismo, se tiene el sistema iterativo en forma matricial $X = TX + c$, donde:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} & \cdots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & -a_{23}/a_{22} & \cdots & -a_{2n}/a_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & -a_{n3}/a_{nn} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{bmatrix}$$

Dada un vector inicial $x^{(o)}$, el Método de Jacobi consiste en obtener una secuencia $x^{(o)}$, $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ..., $x^{(k)}$, por medio de la relación recursiva:

$$\boxed{x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c}. \quad k = 1,2,\ldots$$

Observe que el proceso iterativo utiliza solamente aproximaciones de la iteración anterior.

Ejemplo 1

Resolver el sistema de ecuaciones Lineales, por el Método de Jacobi con solución inicial $x^{(o)} = [0{,}7 \quad -1{,}6 \quad 0{,}6]^T$ y tolerancia $\varepsilon \le 0{,}05$.

$$\begin{aligned} 10x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 &= -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Solución

Separando los elementos diagonal, se tiene:

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{10}(7 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{5}(-8 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{10}(6 - 2x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)}) \end{aligned}\right| \quad \text{Algoritmo elemento a elemento}$$

Arreglamos en forma matricial

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -2/10 & -1/10 \\ -1/5 & 0 & -1/5 \\ -2/10 & -3/10 & 0 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} 7/10 \\ -8/5 \\ 6/10 \end{bmatrix}$$

Solución para k=1 $\qquad x^{(1)} = Tx^{(0)} + c \Rightarrow x^{(1)}$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & -2/10 & -1/10 \\ -1/5 & 0 & -1/5 \\ -2/10 & -3/10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}7 \\ -1{,}6 \\ 0{,}6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7/10 \\ -8/5 \\ 6/10 \end{bmatrix}$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0{,}96 \\ -1{,}86 \\ 0{,}94 \end{bmatrix}$$

Cálculo de $\varepsilon^{(1)}$:

$$\left|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right| = |0{,}7 - 0{,}96| = 0{,}26$$
$$\left|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\right| = |-1{,}86 - 1{,}6| = 0{,}26$$
$$\left|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}\right| = |0{,}6 - 0{,}94| = 0{,}34$$

$$\delta^{(1)} = \frac{0{,}34}{\max\limits_{i=1,3}\left|x_i^{(1)}\right|} = \frac{0{,}34}{1{,}86} = 0{,}1828 > TOL$$

Para k=2:

$$X^{(2)} = \begin{bmatrix} 0{,}978 \\ -1{,}98 \\ 0{,}966 \end{bmatrix} \Rightarrow \delta^{(2)} = \frac{0{,}12}{1{,}98} = 0{,}0606 > TOL$$

Para k=3:

$$X^{(3)} = \begin{bmatrix} 0{,}9994 \\ -1{,}9888 \\ 0{,}99984 \end{bmatrix} \Rightarrow \delta^{(3)} = \frac{0{,}0324}{1{,}9888} = 0{,}0163 < TOL$$

$$x \approx \begin{bmatrix} 0{,}9994 \\ -1{,}9888 \\ 0{,}9984 \end{bmatrix}$$ Solución con error menor que 0,05.

Condiciones suficientes para la convergencia del Método de Jacobi

Teorema 1

Sean $T \in \Re^{nxn}$ y $c \in \Re^{n}$. Si para alguna norma inducida se verifica que $\|T\| < 1$, entonces:

Existe solamente una y una solución $x \in \Re^{n}$ de la ecuación $x = Tx + c$.
La sucesión $\{x^{(k)}\}$, generada por la expresión de recurrencia $x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c$, $k =$ 1,2 ..., converge para x, cualquiera que sea su punto inicial $x^{(0)}$.
El error de sucesión de x por $x^{(k)}$, x- $x^{(k)}$,satisfacen

$$\left\|x - x^{(k)}\right\| \le \frac{\|T\|}{1 - \|T\|}\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|,\ k=1,2,\ldots \quad (*)$$

Demostración:
La ecuación $x = Tx + c$ es equivalente a $(I - T)x = c$, que tendrá una y solo una solución si la matriz $(I - T)$ es no singular.
Suponga que I-T es singular. Entonces existe $x \neq 0$ (en R^n) tal que $(I$-$T)x= 0$, y además $x = Tx$. Luego, para la norma considerada, se verifica que:

$\|x\| = \|Tx\| \leq \|T\| \|x\|$,

concluyéndose inmediatamente que $\|T\| \geq 1$. Como este factor es contrario a la hipótesis que $\|T\| < 1$, a la matriz I-T no debe ser singular, como se pretende mostrar

Como $x = T\,x + c$ y $x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c$, $\forall k$ se verifica que

$x - x^{(k)} = Tx + c - (T\,x^{(k-1)} + c) = T\left(x - x^{(k-1)}\right)$,   k = 1,2,...

Aplicando sucesivamente esta expresión, se concluye que

$x - x^{(k)} = T\left(x - x^{(k-1)}\right) = T^2\left(x - x^{(k-2)}\right) = \cdots = T^k\left(x - x^{(0)}\right)$,   k = 1,2,...

Se puede escribir entonces como $\|x - x^{(k)}\| \leq \|T^k\| \|x - x^{(0)}\|$

Por otro lado, se tiene que

$$\|T^k\| = \|\overbrace{T * T * .... * T}^{k\ veces}\| \leq \overbrace{\|T\| * \|T\| * .... * \|T\|}^{k\ veces} = \|T\|^k$$

Como $\|T\| < 1$, se puede afirmar que el lim $_{k \to \infty}$ $\|T\|^k$ =0, resultando entonces que $\lim_{k \to \infty} \|x - x^{(k)}\|$=0, como se pretende mostrar.

Partiendo de la expresión

$x - x^{(k)} = T(x - x^{(k-1)})$,

válida para k=1,2,..., vista anteriormente, podemos concluir que

$x - x^{(k)} = T(x - x^{(k)} + x^{(k)} - x^{(k-1)}) = T(x - x^{(k)}) + T(x^{(k)} - x^{(k-1)})$

De esta expresión resulta que

$$\begin{aligned} \|x - x^{(k)}\| &\leq \|T(x - x^{(k)})\| + \|T(x^{(k)} - x^{(k-1)})\| \\ &\leq \|T\| \|(x - x^{(k)})\| + \|T\| \|(x^{(k)} - x^{(k-1)})\| \end{aligned}$$

que puede ser re-escrita como

$(1 - \|T\|) \|x - x^{(k)}\| \leq \|T\| \|(x^{(k)} - x^{(k-1)})\|$

Dado que $\|T\| < 1$, se tiene que $(1 - \|T\|) > 0$, y se obtiene inmediatamente la ecuación (*).

Si nuevamente A$\in$ R^{nxn}. Se dice que la matriz A es <u>estrictamente diagonalmente dominante por líneas</u> cuando se verifica

$$\boxed{|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|,} \quad \text{i = 1,...,n,}$$

o sea, cuando para cada fila de la matriz se verifica que el valor absoluto de los elementos de la diagonal es superior a la suma de los valores absolutos de todos los demás elementos. El resultado siguiente proporciona condiciones suficientes para la convergencia del método de Jacobi. No siempre estas condiciones son necesarias para la convergencia del método de Jacobi. Esto es, hay casos en que estas condiciones no se verifican y el método converge.

Teorema 2

Sea $A\in$ R^{nxn} y $b\in R^n$. Sea la matriz A estrictamente diagonal dominante por filas entonces la sucesión generada por el método de Jacobi converge a una única solución del sistema de ecuaciones Ax=**b**, cualquiera que sea el punto inicial $x^{(0)}$.

Demostración La expresión de recurrencia del método de Jacobi es:
$x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c$,
Donde T y c son obtenido a costa de A y b, de acuerdo con las expresiones vistas anteriormente. Siendo A estrictamente diagonal dominante por filas, se verifica que todos los elementos de su diagonal no sean nulos. Luego la matriz b y o el vector c están bien definidos.
Se tiene también, para cualquier i =1,...,n que

$$\sum_{j=1}^{n}\left|t_{ij}\right| = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| = \frac{1}{\left|a_{ii}\right|}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left|a_{ij}\right| < 1,$$

se concluye inmediatamente que
$\|T\|_\infty < 1$
Aplicando ahora el resultado sobre la convergencia de los métodos iterativos, se puede afirmar que la ecuación x=Tx+c tiene una y solo una solución $\bar{x}$, y también que el método de Jacobi converge a $\bar{x}$, cualquiera que sea el punto inicial $x^{(0)}$.
Como corolario de este resultado se tiene que toda matriz cuadrada estrictamente diagonal dominante por filas es no singular.
De hecho, si en la matriz A los coeficientes del sistema no fueran estrictamente diagonal dominante por filas no se garantiza la convergencia del método. En tal situación deberá proceder a una previa manipulación de A de forma que satisfaga las condiciones de convergencia. Esta manipulación puede pasar por el intercambio de filas de la matriz, o intercambio de columnas (cambiando el orden de las variables), o realizando otras operaciones sobre la matriz que mantenga la equivalencia del sistema de ecuaciones.

Ejemplo 2

Sea el sistema de ecuaciones lineales:
$x_1 + x_2 = 3$
$x_1 - 3x_2 = -3$
$|a_{11}| = |1| >= 1$
$|a_{22}| = |-3| >= 1$
Las Condiciones de convergencia del teorema 2 no son satisfechas, pero el método de Jacobi genera una secuencia convergente a la solución exacta $x = \left[3/2 \quad 3/2\right]^T$. Si las condiciones de suficiencia no se satisfacen, no significa que el método no pueda converger.

Si analizamos el criterio de la norma de la matriz de iteración $\|T\|_\infty = \rho(T) = \max_{1<=i<=n} |\lambda_i| = 0.557 < 1$, concluimos que converge.

Ejemplo 3

Considere el sistema Lineal:

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = -2$$
$$5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3$$
$$0x_1 + 6x_2 + 8x_3 = -6$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 8 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} |1| >= |3| + |1| = 4 \\ |1| >= 5 + |2| = 6 \text{ no cumple } \Rightarrow \\ |8| >= |0| + 6 = 6 \end{array} \qquad \|T\|_\infty = \rho(T) = \max_{1<=i<=n} |\lambda_i| = 2.7511 > 1$$

Las condiciones do teorema 2 no son satisfechas. Una Solución posible es permutar las ecuaciones. Sea en el ejemplo se <u>permuta la primera ecuación con la segunda ecuación</u>:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 8 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} |5| >= |2| + |2| = 4 \\ |3| >= |1| + |1| = 2 \text{ si cumple } \Rightarrow \\ |8| >= |0| + |6| = 6 \end{array} \qquad \|T\|_\infty = \rho(T) = \max_{1<=i<=n} |\lambda_i| = 0.7223 > 1$$

Las condiciones pasan a ser satisfechas y la convergencia esta garantizada para cualquier vector inicial. Este tipo de procedimiento no siempre es posible.

Deducción de la fórmula matricial del Método Jacobi

Decomponga la matriz de coeficientes de A en:

$$A = D - L - U$$

Donde:

L – Matriz Triangular Inferior

D – Matriz Diagonal

U – Matriz Triangular Superior

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn-1} & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{nn} \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$(D-L-U)x=b$

$Dx-Lx-Ux=b$

$Dx=b+(L+U)x$

$Dx^{(k+1)}=b+(L+U)x^{(k)}$

$x^{(k+1)}=D^{-1}(L+U)x^{(k)}+D^{-1}b$

$x^{(k+1)}=Tx^{(k)}+c$

$$\boxed{\begin{aligned} T_j &= D^{-1}(L+U) \\ c_j &= D^{-1}b \end{aligned}}$$

Ejemplo 4

Aplicando el método de Jacobi, obtenga una solución aproximada del sistema de ecuaciones, con un error máximo absoluto en cada variable de $5\text{x}10^{-3}$

$$\begin{aligned} 4x_1-2x_2+x_3 &= 3 \\ x_1-x_2+3x_3 &= 3 \\ -x_1+3x_2 &= 2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solución

La matriz de coeficientes del sistema no es estrictamente diagonalmente dominante por filas. Sin embargo, <u>intercambiando la segunda ecuación con la tercera ecuación</u> se obtiene el sistema equivalente

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

cuya matriz de coeficientes ya es estrictamente diagonalmente dominante por filas, garantizando la convergencia del método de Jacobi.

La expresión de recurrencia del método de Jacobi es $x^{(k)}=Tx^{(k-1)}+c$, donde

$$T=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad c=\begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Siendo $e^{(k)}$ el error en la iteración k, es una vez que $\|T\|_\infty = \dfrac{3}{4}$

$$\left\|e^{(k)}\right\|_\infty \le \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_\infty = 3\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_\infty$$

garantizando un error máximo absoluto en cada variable de $5x10^{-3}$ en la iteración k y equivalente a $\left\|e^{(k)}\right\|_\infty \le 5x10^{-3}$. Para lo cual, bastará calcular $\varepsilon_k = 3\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_\infty < 5x10^{-3}$, que será la condición de parada del método.

Partiendo de la condición inicial nula, se obtuvieron los resultados presentados en la tabla. De acuerdo con la estimación del error.

Una solución del sistema es $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, obteniéndose en la iteración 10 errores máximos absolutos en todas las variables inferiores a $5x10^{-4}$, pero el error estimado utilizado es, en este caso, algo conservadora.

k=0

$$T= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} = 0.7500 \\ \frac{2}{3} = 0.6667 \\ 1 = 1.0000 \end{bmatrix}$$

k=1 $\quad \varepsilon_1 = 3\left\|X^{(1)} - X^{(0)}\right\|_\infty = 3*1 = 3$

$$T= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} = 0.8333 \\ \frac{11}{12} = 0.9167 \\ \frac{35}{36} = 0.9722 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_2 = 3\left\|x^{(2)} - x^{(1)}\right\|_\infty = 3*0.25 = 0.75$$

Resumen de iteraciones:

k	x_1	x_2	x_3	ε_k
0	0	0	0	----
1	0.7500	0.6667	1.0000	3
2	0.8333	0.9167	0.9722	0.75
3	0.9653	0.9444	1.0278	0.40
4	0.9653	0.9884	0.9931	0.13
….	………	……….	……..	……
9	1.0002	0.9994	1.0006	$0.6x0^{-3}$
10	0.9996	1.0000	0.9998	$0.26x10^{-3}$

Método Iterativo de Gauss-Seidel

Así como no Método de Jacobi el sistema Lineal $Ax = b$ es escrito en la forma equivalente:

$$x = Tx + c$$

Como en el Método Jacobi, se despeja la diagonal, y el proceso iterativo de actualización es secuencial, componente por componente. La diferencia es que, en el momento de realizarse la actualización de las componentes del vector en una determinada iteración, el algoritmo utiliza las componentes de la iteración ya actualizadas en la iteración actual, con las restantes no actualizadas de la iteración anterior. Por ejemplo, si se va a calcular la componente $x_j^{(k+1)}$ de la iteración (k+1), se utiliza en el cálculo las componentes ya actualizadas $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \ldots, x_{j-1}^{(k+1)}$ además de las componentes no actualizadas de la iteración anterior $x_{j+1}^{(k)}, x_{j+2}^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}$.

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - a_{14}x_4^{(k)} - \ldots\ldots\ldots - a_{1n}x_n^{(k)})$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - a_{24}x_4^{(k)} \ldots\ldots\ldots - a_{2n}x_n^{(k)})$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - a_{34}x_4^{(k)} - \ldots\ldots\ldots - a_{2n}x_n^{(k)})$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - a_{n3}x_3^{(k+1)} \ldots\ldots\ldots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)})$$

Ejemplo 5

Resolver el sistema lineal utilizando el Método Iterativo de Gauss-Seidel, con $x^o = [0,0,0]^T$ y tolerancia $TOL \leq 5\times10^{-2}$.

$$5x_1 + x_2 + x_3 = 5$$
$$3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6$$
$$3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0$$

Solución

El proceso iterativo es dado por:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{5}(5 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)})$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4}(6 - 3x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)})$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{6}(0 - 3x_1^{(k+1)} - 3x_2^{(k+1)})$$

Para k=1 y $\underline{x}^{o} = [0,0,0]^{T}$

$$x^{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,75 \\ -0,875 \end{bmatrix}$$

Cálculo de $\varepsilon^{(1)}$:

$$\left| x_1^{(1)} - x_1^{(0)} \right| = |1,0 - 0| = 1,0$$

$$\left| x_2^{(1)} - x_2^{(0)} \right| = |0,75 - 0,0| = 0,75$$

$$\left| x_3^{(1)} - x_3^{(0)} \right| = |-0,875 - 0| = 0,875$$

$$\delta^{(1)} = \frac{\max\limits_{i=1,3} \varepsilon_i^{(1)}}{\max\limits_{i=1,3} \left| x_i^{(1)} \right|} = \frac{1,0}{1,0} = 1,0 > \varepsilon$$

Para k=2 y $X^{(1)} = [1,0,\ 0,75,\ -0,875]^{T}$:

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1,025 \\ 0,95 \\ -0,9875 \end{bmatrix}$$

$$\left| x_1^{(2)} - x_1^{(1)} \right| = |1,025 - 1,0| = 0,025$$

$$\left| x_2^{(2)} - x_2^{(1)} \right| = |0,95 - 0,75| = 0,20$$

$$\left| x_3^{(2)} - x_3^{(1)} \right| = |-0,9875 - (-0,875)| = 0,1125$$

$$\delta^{(2)} = \frac{\max\limits_{i=1,3} \varepsilon_i^{(2)}}{\max\limits_{i=1,3} \left| x_i^{(2)} \right|} = \frac{0,20}{1,025} = 0,1957 > TOL$$

Para k=3 y $x^{(2)} = [1,0025,\ 0,95,\ -0,9875]^{T}$:

$$x^{(3)} = \begin{bmatrix} 1{,}0075 \\ 0{,}9912 \\ -0{,}9994 \end{bmatrix}$$

$$\left|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}\right| = |1{,}075 - 1{,}025| = 0{,}0175$$

$$\left|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}\right| = |0{,}9912 - 0{,}95| = 0{,}0412$$

$$\left|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}\right| = |-0{,}9994 - (-0{,}9875)| = 0{,}0119$$

$$\delta^{(3)} = \frac{\max\limits_{i=1,3} \varepsilon_i^{(3)}}{\max\limits_{i=1,3} \left|x_i^{(3)}\right|} = \frac{0{,}0412}{1{,}075} = 0{,}0383 < TOL$$

$$x = \begin{bmatrix} 1{,}0075 \\ 0{,}9912 \\ -0{,}9994 \end{bmatrix}$$ es solución con menor error que 0,05.

Deducción de la fórmula matricial del Método Gauss-Seidel

Descomposición de la matriz de coeficientes A en:

$$A = L + D + U$$

Donde:
L – Matriz Triangular Inferior
D – Matriz Diagonal
U – Matriz Triangular Superior

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn-1} & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{nn} \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(D - L - U)x = b$$

$$Dx - Lx - Ux = b$$

$$Dx = b + (L + U)x$$

$$x = D^{-1}b + D^{-1}Lx + D^{-1}Ux$$

$$x^{(k+1)} = D^{-1}b + D^{-1}Lx^{(k+1)} + D^{-1}Ux^{(k)}$$

$$x^{(k+1)} = (D - L)^{-1}Ux^{(k)} + (D - L)^{-1}b$$

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$$

Interpretación Geométrica del Caso 2×2

Considere o Sistema Lineal:

$x_1 + x_2 = 3$

$x_1 - 3x_2 = -3$

El esquema iterativo utilizando por el Método de Gauss-Seidel es dado por:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{1}(3 - x_2^{(k)})$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{3}(3 + 3x_1^{(k+1)})$$

Para k=0 y $\underline{x}^{(0)} = [0 \quad 0]^T$:

$x_1^{(1)} = 3$

$x_2^{(1)} = 2$

Para k=1 y $\underline{x}^{(1)} = [3 \quad 2]^T$:

$x_1^{(2)} = 1$

$x_2^{(2)} = 4/3$

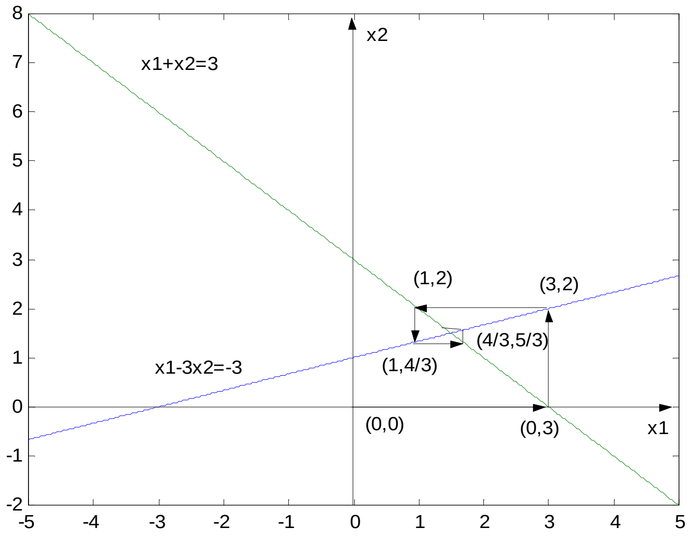
Para k=2 y $\underline{x}^{(2)} = [1 \quad 4/3]^T$:

$x_1^{(3)} = 5/3$

$x_2^{(3)} = 14/9$

La solución exacta es dada por: $x = [3/2 \quad 3/2]^T$.

Este proceso iterativo hasta la convergencia puede ser interpretado geométricamente en un gráfico con una componente x_1 en la abscisa y una componente x_2 en la ordenada.



Observación 1: Se verifica por el gráfico anterior que la secuencia $x^{(o)}$, $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ..., $x^{(k)}$ está convergiendo para la solución exacta $x = [3/2 \quad 3/2]^T$.

Observación 2: La secuencia generada por el Método de Gauss-Seidel depende fuertemente de la posición de las ecuaciones. Esta observación puede ser mejor entendida modificando el orden de las ecuaciones del ejemplo anterior.

Considere el mismo sistema lineal anterior, pero modificando el orden de las ecuaciones:

$x_1 - 3x_2 = -3$

$x_1 + x_2 = 3$

El esquema iterativo utilizando el Método de Gauss-Seidel es dado por:

$x_1^{(k+1)} = (-3 + 3x_2^{(k)})$

$x_2^{(k+1)} = (3 - x_1^{(k+1)})$

Para k=0 y $\underline{x}^{(0)} = [0 \quad 0]^T$:

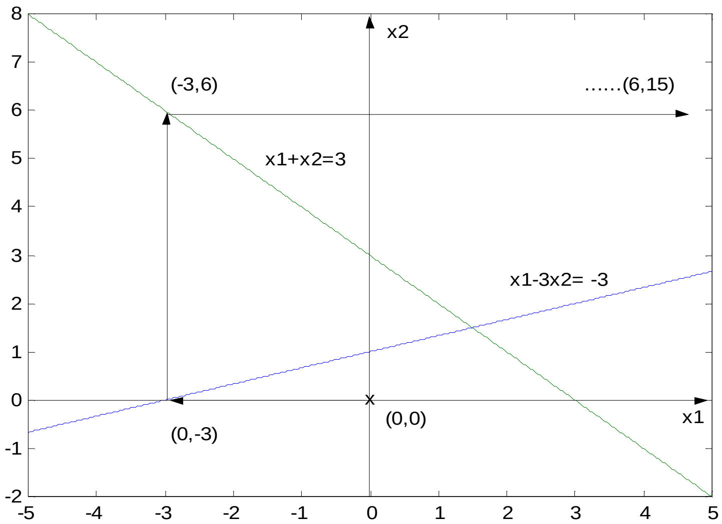
$x_1^{(1)} = -3$

$x_2^{(1)} = -6$

Para k=1 y $\underline{x}^{(1)} = [-3 \quad -6]^T$:

$x_1^{(1)} = 15$

$x_2^{(1)} = -12$



Método de SobreRelajación (SOR)

Se han realizado varios intentos de incrementar la velocidad de convergencia de la iteración de Jacobi y Gauss-Seidel. Uno de ellos es el de relajación sucesiva.

Este método se basa en la idea que una vez producido un nuevo valor $\tilde{x}_i^{(k)}$ mediante el método de Gauss-Seidel, puede lograrse una mejor aproximación formando un promedio ponderado de los valores actual y anterior, de esta manera quedaría:

$x_i^{(k)} = (1 - \omega) x_i^{(k-1)} + \omega \tilde{x}_i^{(k)}$

$1 < \omega < 2$

En general: $$x_i^{(k)} = (1-\omega) x_i^{(k-1)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left\{ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} \right\}$$

En forma matricial

$\boldsymbol{x}^{(k)}=\boldsymbol{T}_{\omega}\mathbf{x}^{(k-1)}+\boldsymbol{c}_{\omega}$

$$\boldsymbol{T}_{\omega}=(\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{L})^{-1}\{(\boldsymbol{1}-\omega)\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{U}\}$$

$$\boldsymbol{c}_{\omega}=(\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{L})^{-1}\omega\,\boldsymbol{b}$$

Teorema de Stein-Rosemberg : Si $a_{ij}\leq 0 \quad i\neq j$

$a_{ii}>0 \quad i = 1,2,...,n$

Entonces se satisface una y solamente una de las siguientes afirmaciones:

$\mathbf{x}^{(k)}=\mathbf{T}\mathbf{x}^{(k-1)}+\mathbf{c}$ y se puede demostrar que son convergentes cuando $\boldsymbol{\rho(T)<1}$.

a) $\boldsymbol{0<\rho(T_g)<\rho(T_j)<1}$

b) $\boldsymbol{1<\rho(T_j)<\rho(T_g)}$

c) $\boldsymbol{\rho(T_j)=\rho(T_j)=0}$

d) $\boldsymbol{\rho(T_j)=\rho(T_g)=1}$

Teorema : Si aii≠0 para i=1,2,...,n, entonces $\rho(T_\omega)\geq|\omega-1|$. Esto implica que $\rho(T_\omega)<1$ sólo si $0<\omega<2$, donde:

Teorema : (Ostrwki-Reich) Si A es una matriz definida positiva y $\boldsymbol{0<\omega<2}$, entonces el método SOR converge para cualquier elección de la aproximación inicial $\mathbf{x}^{(0)}$ del vector solución.

Teorema : Si A es definida positiva y tridiagonal, entonces $\boldsymbol{\rho(T_g)=[\rho(T_j)]^2<1}$, y la elección

$$\omega=\frac{2}{1+\sqrt{1-[\rho(T_j)]^2}} \qquad \text{y} \qquad \rho(T\omega)=\omega-1$$

óptima de ω para el método SOR es:

Ejemplo 6

Sea Ax = b un sistema de ecuaciones lineales.
a)señalar tres criterios de convergencia que permitan resolverlo por Gauss - Seidel.
b)Dado

$$\begin{aligned} x_1+8x_2+x_3 &= 10\\ x_1+x_2+7x_3 &= 9\\ 9x_1+x_2+x_3 &= 11 \end{aligned}$$

realice las transformaciones *más adecuadas* que permitan resolverlo por Gauss - Seidel, iniciando con (0 , 0 , 0). Realizar tres iteraciones.

c)Calcular una cota del error obtenido.

$$error \le \frac{T^n}{1-T}\left\| x^{(0)} - x^{(1)} \right\|_\infty$$

Solución

a) El método de Gauss converge si:

i)La matriz A es diagonal - dominante. Esto es:

$$\left|a_{ii}\right| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left|a_{ij}\right|$$

ii)La matriz A es simétrica y definida positiva.

iii)El radio espectral de la matriz iterativa T es menor que 1

$$\rho(T) < 1 \quad \text{donde} \quad \rho(T) = \max_{i} \left|\lambda_i\right| \; ; \; \lambda_i : \text{valores propios}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \\ 9 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{pivoteo} \rightarrow \widehat{A} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \; ; \; \widehat{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Ahora la matriz es diagonal - dominante

$$x_1 = \frac{11 - x_2 - x_3}{9}$$

$$x_2 = \frac{10 - x_1 - x_3}{8}$$

$$x_3 = \frac{9 - x_1 - x_2}{7}$$

k	x_1	x_2	x_3
0	0	0	0
1	1.222	1.097	0.954
2	0.994	1.007	1.000
3	0.999	1.000	1.000

c)Cota de error:

$$E \le \frac{T^n}{1-T}\left\| x^{(0)} - x^{(1)} \right\|_\infty \; ; \text{ donde } T = \max \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}$$

$$T = \max\{0.225, 0.25, 0.286\} = 0.286$$

$$E \le \frac{(0.286)^3}{1-0.286} \left\| \left(1.222 \; , \; 1.097 \; , \; 0.954 \right) \right\|_\infty = 0.04$$

$\therefore$ cota de error = **0.04**

Ejemplo 7

$$\begin{bmatrix} 2 & k \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Sea el sistema **A x = b** :

a) Para k=-1, es la matriz A definida positiva?
b) Para que valores de k el sistema converge, al usar el método de Gauss-Seidel?
c) Hacer 03 iteraciones de Gauss-Seidel para k=-3

Solución

a) A es definida positiva si:

$x^T A x > 0$, para todo vector columna x no nulo

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + 2x_2^2 > 0 \quad \text{para todo x no nulo.}$$

b)

$$T_G = (D-L)^{-1}U$$

$$(D-L) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(D-L)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$T_G = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -k \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -k/2 \\ 0 & -k/6 \end{bmatrix}$$

$$Det\left|T_G - \lambda I\right| = (-\frac{k}{6} - \lambda)(-\lambda)$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -k/6 \qquad \rho(T_G) = |\lambda_{\max}| = |-k/6|$$

Existe convergencia cuando : $\rho(\mathrm{T_G}) < 1$

Esto se cumple siempre que : $-6 < k < 6$

c) Para Gauss - Seidel (k = -3)

$$x_1^{(n+1)} = 3 + 1.5\, x_2^{(n)}$$
$$x_2^{(n+1)} = 3 + x_1^{(n+1)} / 3$$

n	**x_1**	**x_2**
0	0	0
1	3	4
2	9	6
3	12	7
4	13.5	7.5
5	14.25	7.75
6	14.625	7.875
7	14.8125	7.9375

Ejemplo 8

Sea el método iterativo de Gauss_ Seidel

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ k & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -k \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

a) Para que valores de k el método converge.
b) Realice tres iteraciones eligiendo k=1. Usando como vector inicial $(0,0)^t$
c) Para k=1, encuentre el woptimo.
d) Realice 02 iteraciones partiendo como vector inicial el último resultado obtenido en b). Comente sus resultados. Usar SOR.

Solución
a)

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -k & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -k \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -k & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -k/2 \\ 0 & k^2/6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2-k/3 \end{bmatrix}$$

$$|Tgs - \lambda I| = -\lambda(k^2/6 - \lambda) = 0 \Rightarrow \rho(Tgs) = \max|\lambda| = k^2/6 < 1 \Rightarrow -\sqrt{6} < k < \sqrt{6}$$

b) $$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ 0 & 1/6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 5/3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ 0 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 5/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.667 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ 0 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5/3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 5/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 \\ 35/18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1667 \\ 1.9444 \end{bmatrix}$$

c) $\rho(T_{gs}) = 1/6$

$$w_{opt} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(T_{gs})}} = 1.0455$$

d)
$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= (1-w)x_1^{(k)} + \frac{w}{2}(2 - x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} &= (1-w)x_2^{(k)} + \frac{w}{3}(6 - x_1^{(k+1)}) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0215 \\ 1.9951 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0016 \\ 1.9997 \end{bmatrix}$$

Se observa claramente la convergencia.

Problemas Propuestos

P1

Se considera el sistema lineal:

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-b \\ 0 \\ a+b \end{bmatrix}$$

a) Calcular la matriz de la iteración de Jacobi y obtener su polinomio característico y a partir de él los valores propios. ¿Qué relación debe existir entre los coeficientes a y b para que el método de Jacobi sea convergente?

b) Tomando a=3 y b=2, calcular 03 iteraciones utilizando el método de Jacobi con vector inicial nulo.

c) Cuántas iteraciones se necesitarían para calcular la solución aproximada con 3 c.d.e.

P2

a) Evalué el valor de α para que el método de Gauss Seidel converja

$$\begin{bmatrix} 3+\alpha & -1 \\ -1 & 2+\alpha \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Donde α es un parámetro real.

b) Si $\alpha=1$ y $x^{(0)} = [0\ 0]^t$ encuentre $x^{(3)}$ usando Gauss-Seidel.

c) Estime el máximo error relativo cometido en esta iteración.

P3

Un método iterativo poco usual es el método de Richardson, que establece que:

$$x^{(k+1)} = (I - A)x^{(k)} + b$$

Donde “I” es la matriz identidad.

a) Para el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & k \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Obtener los valores “k” de tal manera que el radio espectral de Richardson $\rho(T_R)$ sea de 0.9.

b) Con el valor de “k” obtenido en a) realice 03 iteraciones partiendo de $(0,0)^T$,y estime el error.

P4

Sea el método iterativo de Gauss_ Seidel

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ k & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -k \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

a) Para que valores de k el método converge.

b) Realice tres iteraciones eligiendo k=1. Usando como vector inicial $(0,0)^t$

c) Para k=1, encuentre el $\omega_{\text{óptimo}}$.

d)Realice 02 iteraciones partiendo como vector inicial el último resultado obtenido en b). Comente sus resultados.

P5

La distribución de esfuerzos en una barra longitudinal depende de los coeficientes α y β y pueden aproximarse resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ -\beta & \alpha & -\beta \\ 0 & -\beta & \alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix}$$

a) Encuentre una relación entre α y β para todos los casos de convergencia del método de Jacobi.

b) Analice la convergencia para el método de Gauss-Seidel, con $\alpha = 2$ y $\beta = 1$

c) Para $\alpha = 4$ y $\beta = 1$ determine el ω óptimo y realice 03 iteraciones a partir de $(0, 0, 0)^T$.

P6

Un móvil de masa m_1 se desplaza en el plano $X - Y$ con dos tripulantes a bordo de masas m_2 y m_3, respectivamente; se sabe que la trayectoria obedece a la siguiente función:

$$y = m_1 x^2 + m_2 e^x + m_3$$

Experimentalmente se tomaron tres puntos de dicha trayectoria:

x	1	1.5	2
y	0.733	1.464	2.513

a) Plantee el sistema de ecuaciones para obtener las masas.
b) Analice la convergencia del sistema para el método de Jacobi.
c) Si existe convergencia realice 03 iteraciones de Jacobi partiendo de un vector nulo y muestre el error, en caso contrario resuelva el sistema usando eliminación Gaussiana con pivoteo total.