UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA
DACIBAHCC

P.A. 2023-3
5/3/2024

EXAMEN FINAL
DE METODOS NUMERICOS (MB536)

APELLIDOS Y NOMBRES	CODIGO	FIRMA	SECCION

NOTA DEL EXAMEN			
	NÚMEROS	LETRAS	Firma del docente

INDICACIONES:

- Se permite el uso de dos hojas de formulario.
- Está permitido el uso de cualquier tipo de calculadoras, sin acceso a internet.
- No se permite el uso de celulares, laptop o dispositivos que usan internet.
- Resolver cada pregunta solo en el espacio asignado para tal fin.
- La claridad y buena presentación serán consideradas en la calificación.
- Duración del examen: **1 h 50 *min***

PARTE I

Responda las siguientes preguntas:

1. **(1 P)** Sea la siguiente integral: $\int_0^{20}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}x^7+\pi x^3+\frac{1}{7}\right)dx$, determine el error al aplicar la Cuadratura de Gauss-Legendre, con N=4 puntos. Justifique su respuesta.

Para la Cuadratura de Gauss Legendre de 4 puntos:

I=c1*F(x1)+c2*F(x2)+c3*F(x3) +c4*F(x4)

Dado que tenemos 8 coeficientes indeterminados, deberá ser exacta para el conjunto de 8 funciones polinómicas:

W(x)={1, x, x^2, x^3, x^4, x^5 x^6, x^7}.

Por propiedad de la integral, será exacta para cualquier combinación lineal de estas funciones, es decir para cualquier integrando de forma polinómica de grado 7 o menor.

Por lo tanto, para la función dada, el Error=0.

2. **(1 P)** Sea la siguiente tabla:

x	1	2	4
y	9	β	12

Al aplicar Lagrange, se obtiene el siguiente polinomio:

$$P(x) = \frac{(x-2)}{(1-2)}\frac{(x-4)}{(1-4)}(a+b) + \frac{(x-1)}{(2-1)}\frac{(x-4)}{(2-4)}(a+c) + \frac{(x-1)}{(4-1)}\frac{(x-2)}{(4-2)}(b+c)$$

Si $P'(3) = 10$, obtener: $a + b - c + \beta$

Solución

$P'(3) = 10 = 6 - \beta/2 \Rightarrow \beta = -8$

$(a+b) = 9$, $(a+c) = \beta = -8$, $(b+c) = 12$

$a = -5.5$, $b = 14.5$, $c = -2.5$

$$a + b - c + \beta = 3.5$$

3. **(1 P)** Dada la siguiente tabla:

t	0	1	t_2
y	1	3	y_2

Si el **<u>spline cúbico natural</u>** para los dos intervalos es:

$$S(t) = \begin{cases} S_0(t) = 1 + \frac{55}{24}t - \frac{7}{24}t^3 & t \in [0,1] \\ S_1(t) = 3 + \frac{17}{12}(t-1) - \frac{7}{8}(t-1)^2 + \frac{7}{72}(t-1)^3 & t \in [1, t_2] \end{cases}$$

halle el punto (t_2, y_2)

S_1”(t2)=0

7*t2/3-7/3=0

t2=4

y2=S_1(4)=2

4. **(1P**) Sea la EDO de tercer orden:

$$q'''+4*q'=e^{-3t}+7*q''$$

$$q(1)=1 \quad q'(1)=-3 \quad q''(1)=2$$

Estimar q(1.05), q'(1.05) y q''(1.05) h=0.025, mediante Euler paso a paso.

Solución

q'=z

z'=w

w'=e-3t+7*w-4z

t0=1 q0=1 z0=-3 w0=2 h=0.025

h=t1=t0+h

q1=q0+h*z0

z1=z0+h*w0

w1=w0+h*(exp(-3*t0)+7*w0-4*z0)

t	q	q'=z	q''=w
1.0000	1.0000	-3.0000	2.0000
1.0250	0.9250	-2.9500	2.6512
1.0500	0.8513	-2.8837	3.4114

5. **(1 P)** La concentración de una sustancia contaminante en un lago depende del tiempo y viene dada por:

$$C(t) = 70e^{\beta t} + 20e^{\omega t}$$

Se adoptaron algunas medidas que se registraron en el cuadro siguiente:

t	1	2
C(t)	71	71

Plantear el sistema lineal al usar la primera iteración del método de Newton con valor inicial $\beta_0 = 0.5$ y $\omega_0 = 1$, donde las variables a determinar serían $(\Delta\beta, \Delta\omega)$.

Solución

$$\begin{pmatrix} -70\sqrt{\mathrm{e}} & 20\,\mathrm{e} \\ -140\,\mathrm{e} & 40\,\mathrm{e}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\beta \\ \Delta\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70\sqrt{\mathrm{e}} - 20\,\mathrm{e} - 71 \\ 70\,\mathrm{e} - 20\,\mathrm{e}^2 - 71 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -115.4105 & 54.3556 \\ -380.5595 & 295.5622 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\beta \\ \Delta\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9.9551 \\ -28.5014 \end{pmatrix}$$

PARTE II

Problema 1

En la mayoría de los gases, la viscosidad se calcula por medio de una forma generalizada de la fórmula de Sutherland:

$$\mu = C_1 \frac{T^{1.5}}{T + C_2}$$

Donde $\mathbf{C_1}$ y $\mathbf{C_2}$ son constantes que dependen del tipo de gas.

Para el caso del aire $\mathbf{C_1=1.458x10^{-6}}$ kg/(s-m-°$K^{0.5}$) y $\mathbf{C_2=110.4}$ °K y la viscosidad dinámica estará dada en kg/m-s.

a) **(2.5 P)** Se desea reemplazar esta fórmula por otra más sencilla para lo cual tabule la viscosidad del aire para temperaturas entre 100 y 500 °K, con incrementos de 100° y realice un ajuste exponencial: $\mu = ae^{bT}$
b) **(1.0 P)** Evalué el factor de regresión.
c) **(1.0 P)** Estime la viscosidad a 250° K y estime la viscosidad con las 2 fórmulas y halle la variación porcentual
d) **(0.5 P)** ¿Esta fórmula podría reemplazar a la original? Fundamente su respuesta.

Solucion

a)Tabulando

T	100	200	300	400	500
μ	0.00000693	0. 00001329	0. 00001846	0. 00002285	0. 00002671

De $\mu = ae^{bT}$

Tomando logaritmos:

Log μ = Log a + b T

U = A + b*T

Tabulando Nuevamente

T	100	200	300	400	500
U	-11.8797	-11.2288	-10.8999	-10.6864	-10.5306

Aplicando el ajuste por mínimos cuadrados: U = 0.0032 T -12.0173

A=-12.0173 b=0.0032

a=e^A= 6.0391e-06

μ=6.0391*$10^{-6}e^{0.0032T}$

b) R^2=0.9173

c)

μ shu = 1.5991e-05

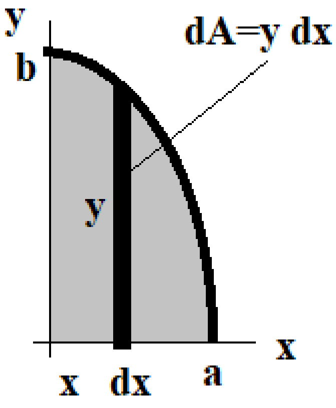
μ exp =   1.3577e-05

Δ = 15.0971 %

d)No se podría usar a fórmula exponencial debido a que genera mucho error

Problema 2

Se desea evaluar el momento de inercia con respecto al eje y de un cuarto de elipse como se muestra en la siguiente figura:



Ecuación de la elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Momento de inercia con respecto al eje y: $Iy = \int_0^a x^2 dA$

Si $a = 3,\ b\ = 4$, aproxime Iy:

a) **(2 P)** Mediante la fórmula de Simpson 3/8 tomando m=3 cubicas
b) **(2 P)** Mediante la cuadratura de Gauss, con 3 puntos.
c) **(1 P)** Si el valor exacto es $\frac{27\pi}{4}$, determine el error en a) y b) y comente sus resultados. ¿Cómo se podría mejorar estos resultados?

Solución

a)

Despejando y reemplazando ***y***:

$$Iy = \int_0^3 x^2 \sqrt{4^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 x^2}\, dx$$

n=3*m=9 particiones

h=(3-0)/9=1/3

```
Ia=3*h/8*(f(0)+3*f(1/3)+ 3*f(2/3)+f(1))
Ib=3*h/8*(f(1)+3*f(4/3)+ 3*f(5/3)+f(2))
Ic=3*h/8*(f(2)+3*f(7/3)+ 3*f(8/3)+f(3))
I=Ia+Ib+Ic= 20.6129
```

```
b) x=3/2*(t+1)
```

$$F(t)=6\left(\frac{3t}{2}+\frac{3}{2}\right)^2\sqrt{1-\frac{\left(\frac{3t}{2}+\frac{3}{2}\right)^2}{9}}$$

```
I= 5/9*F(sqrt(3/5))+8/9*F(0)+5/9*F(-sqrt(3/5))=4.8142

Ig= 21.6639

c)
Error_Simpson=  0.5929


Error_Gauss=   0.4581

La cuadratura de Gauss presenta un menor error
```

Se podría reducir el error tomando mas particiones de Simpson o mas puntos en la cuadratura de Gauss.

Problema 3

Un móvil describe una trayectoria curvilínea en el plano x-y sujeto a la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$2x' + y' - y = t \quad x(0) = 1$$
$$x' + y' = 2t^2 \quad y(0) = 1$$

a) **(1.0 P)** Plantear el algoritmo de Taylor de orden 2 para este problema.
b) **(2.0 P)** Determine la ubicación de la partícula al cabo de 0.3 segundos mediante el método de Taylor de orden 2 (h=0.1).
c) **(1.0 P)** Determine el error absoluto de b) si la solución analítica es:
   $x(t) = C1 + 2t^3/3 - e^{-t}(C2 + e^t(4t^2 - 9t + 9))$
   $y(t) = e^{-t}(C2 + e^t(4t^2 - 9t + 9))$
d) **(1 P)** Estime el vector velocidad y su módulo en t=0.3 segundos y determine su error relativo porcentual y comente su respuesta.

Solución

a) Reordenando:

   $x'=t+y-2t^2$

   $y'=4t^2-t-y$

   derivando:

   $x''=1+y'-4t=4t^2-5t-y+1$

   $y''=4t-1-y'=9t+y-1-4t^2$

   $t_0=0 \quad x_0=1 \quad y_0=1 \quad h=0.1$

   Algoritmo de Taylor de 2do orden:

   Para n=0, 1, 2

   $t_{n+1}=t_n+h$

   $x_{n+1}=x_n+h*x_n'+h^2/2*x_n''$

   $y_{n+1}=y_n+h*y_n'+h^2/2*y_n''$

b) **Valores de Taylor 2**

tt	**0**	**0.1000**	**0.2000**	**0.3000**
xx	**1.0000**	**1.1000**	**1.1962**	**1.2857**
yy	**1.0000**	**0.9000**	**0.8078**	**0.7303**

En t=3 seg. la partícula se encuentra en (1.2857,0.7303)

c) **Valores exactos**

te =	0	0.1000	0.2000	0.3000
xe =	1.0000	1.0994	1.1952	1.2845
ye =	1.0000	0.9013	0.8102	0.7335

Errores
errx = 0   0.0006   0.0010   0.0012
erry = 0   0.0013   0.0024   0.0032

d) Cálculo de la velocidad aproximada por eje:
vx(0.3)=x'(0.3)= $t_3+y_3-2t_3^2$=0.8503
vy(0.3)=y'(0.3)= $4t_3^2-t_3-y_3$=-0.6703

v(0.3)= 0.8503i-0.6703j
/v(0.3)/=(0.8503^2+0.6703^2)^0.5=1.0827

<u>**Nota:**</u>

Mediante la solución analítica:

vx(0.3)=x'(0.3)= 0.8535

vy(0.3)=y'(0.3)= 0.6735

v = 1.0872

err=0.0045

err_rel=0.4128%

El resultado es bastante aceptable.