UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA P.A. 2023-2
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA

DACIBAHCC

EXAMEN SUSTITUTORIO
DE METODOS NUMERICOS (MB536)

APELLIDOS Y NOMBRES DEL ALUMNO	CODIGO UNI	FIRMA	SECCION

NOTA DEL EXAMEN			
	NÚMEROS	**LETRAS**	**Firma del docente**

INDICACIONES:

- Se permite el uso de dos hojas de formulario.
- Está permitido el uso de cualquier tipo de calculadoras, sin acceso a internet.
- No se permite el uso de celulares, laptop o dispositivos que usan internet.
- Resolver cada pregunta solo en el espacio asignado para tal fin.
- La claridad y buena presentación serán consideradas en la calificación.
- Duración del examen: **1 h 50 *min***

Lima, 05 de enero del 2024

Profesores del Curso:

- Mg. Ing. Rosa Garrido Juárez
- Mg. Ing. Máximo Obregón Ramos
- Ing. Robert Castro Salguero

PARTE I
Responda a las siguientes preguntas:

P1. **(1P)** Sea el siguiente sistema de punto flotante basado en la norma IEEE-754:

Signo (1) – Exponente (3) – Mantisa (4)

Determine el almacenamiento binario y decimal del menor número no normalizado en este sistema de 8 bits.

Solución

K=3

Bias=2^(K-1)-1=3

ExpSN=-(Bias-1)=-2

El menor número no normalizado en este sistema hipotético es:

X=(-1)^(1)*(0.1111)*2^(-2)

X=-(2^-1+2^-2+2^-3+2^-4)*2^-2=-(2^-3+2^-4+2^-5+2^-6)= -0.234375

1	0	0	0	1	1	1	1

P2. **(1P)** Sea la siguiente ecuación diferencial ordinaria de orden superior:

x’’’=x+t+x’+x”

x(0)=1;   x’(0)=1;   x’’(0)=2

Aplique Euler con h=0.01, para aproximar x(0.01), x’(0.01) y x’’(0.01).

Solución

Reducción a 1er orden:

x’=z   x(0) =1

z’=w   z(0)= 1

w’=x+t+z+w   w(0)=2

t0=0, x0=1, z0=1, w0=2, h=0.01

t1=t0+h=0.01

x1=x0+h*z0=1+0.01*1=1.01

z1=z0+h*w0=1+0.01*2=1.02

w1=w0+h*(x0+t0+z0+w0)=2+0.01*(1+0+1+2)=2.04

P3. **(1P)** Determine la ecuación normal (sistema lineal con incógnitas a_0, a_1) para el ajuste de la función: $y = a_0 x^3 + a_1 x$, para los siguientes datos:

x	-1	0	1	2
y	2	3	1	0

Solución

Reemplazando cada punto en la función dada:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando la ecuación normal (ec. matricial):

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 8 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 8 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 66 & 18 \\ 18 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

P4.

a) **(0.5P)** ¿Porque es necesario normalizar en el método de la Potencia en cada iteración?

Es necesario normalizar para evitar el **desbordamiento de los números** cuando se realiza cada iteración.

b) **(0.5P)** ¿Siempre es posible diagonalizar una matriz? $D = Q^{-1}AQ$. Justifique.

No siempre, si la dimensión del espacio nulo (multiplicidad geométrica) es igual al valor de la multiplicidad aritmética, entonces si es posible la diagonalización.

P5. **(1P)** Estimar $\int_{-1}^{1} \boldsymbol{cos(x)dx}$, utilizando el método de Gauss-Legendre de 2 puntos.

Solución: considerando que el intervalo de integración justo coincide con el intervalo de las raíces de Legendre, la integral se simplifica calculándose como:

$f(x) := \cos(x)$

$I := \cos(-0.5774) + \cos(0.5774) = 1.676$

P6.

a) **(0.5P)** Determinar A_0 y A_1 tal que las reglas de integración

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_0 f\left(-\frac{1}{2}\right) + A_1 f\left(+\frac{1}{2}\right)$$

sea exacta para todos los polinomios de grado a lo sumo uno. (Es decir, para todas las funciones lineales).

$$\begin{cases} f(x) = 1 \Rightarrow A_0 + A_1 = \int_{-1}^{1} 1dx = 2 \\ f(x) = x \quad \Rightarrow -\frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{2}A_1 = \int_{-1}^{1} xdx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{x=-1}^{x=1} = 0 \end{cases}$$

$$A_0 = 1, A_1 = 1$$

b) **(0.5P)** Mostrar que la regla generada en la parte a) no es exacta para polinomios de grado dos.

$$\left\{ f(x) = x^2 \Rightarrow \frac{1}{4} * 1 + \frac{1}{4} * 1 \neq \int_{-1}^{1} x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{2}{3} \right.$$

P7. **(1P)** Si se desea hallar la raíz de $f(x) = x^2 - 7$, utilizando el método de Newton-Raphson, hasta alcanzar un error maximo de 1e-10 y partiendo de un valor inicial de 10. Complete el siguiente código en Matlab

```
f=@(x) x^2-7;

df=______________;

x=10;xa=x;

ermax=__________;
nmax= 1e10
fprintf('%2d) %.2f\n',0,x);
for i=1:nmax

 x=_________________________;
 er=abs(x-xa);
 fprintf('%2d) %.15f\n',i,x);

 if ____________
     break
 end
 xa=x;
end
```

Solución

```
f=@(x) x^2-7;
df=@(x) 2*x;
x=14;xa=x; ermax=1e-10;
nmax=1e10;
fprintf('%2d) %.2f\n',0,x);
for i=1:nmax
 x=x-f(x)/df(x);
 er=abs(x-xa);
 fprintf('%2d) %.15f\n',i,x);
 if er<ermax
     break
 end
 xa=x;
end
```

P8. **(1P)** En el problema de las diferencias finitas por el problema del valor frontera para resolver la EDO.

$$\begin{cases} -y'' + y = x, \; x \in (0,1) \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

Al aplicar el método de las diferencias finitas se debe transformar al siguiente sistema lineal:

$$Ay = b,$$

$$b = (ih^3)_{i=1}^{n-1} \text{ e } A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n-1} \; a_{ij} = \begin{cases} h^2 + 2, & i = j \\ -1, & j = i - 1, j = i + 1 \\ 0, & |j - i| > 1 \end{cases}$$

Complete el código de MATLAB:

```
a=0; b=1;h=1/4;

n=(b-a)/h

x=a:h:b;
```

%Sólo usar el comando diag y ones, no usar for….. end

```
A=-----------------------------------------------------------;


B=-----------------------------------------;
```

y=[0; A\B; 0];

Solución

```
A=diag(-(2-h^2)*ones(n-1,1))+diag(ones(n-2,1),-1)+diag(ones(n-2,1),+1);
B=-[1:n-1]'*h^3;
```

PARTE II

Problema 1

En un sistema de trasmisión por fajas, la rueda motriz gira a **n**=1800 RPM, con un diámetro menor **d**=100 mm. Se sabe que la longitud de la faja es **L**=2.5 metros y la distancia entre centros es **C**=1 metro, además:

$$L = 2C + \frac{\pi}{2}(D+d) + \frac{(D-d)^2}{4C}$$

Se desea determinar el diámetro mayor D, en mm:

a) **(1P)** Localice la raíz con un intervalo de longitud 100 mm, aplique Bolzano en los siguientes tramos: [0,100]; [100,200]; [200;300].
b) **(1.5P)** Realice 02 iteraciones de Bisección a partir del intervalo encontrado en a).
c) **(1.5P)** Realice 03 iteraciones de Newton - Raphson a partir del valor encontrado en b) e indique el error de sucesión (por comparación de las 2 últimas iteraciones).

Solución:

a)

$$f(D) = 2C - L + \frac{\pi\,(D+d)}{2} + \frac{(D-d)^2}{4\,C}$$

$$f(D) = \frac{(D-100)^2}{4000} + \frac{\pi\,(D+100)}{2} - 500$$

D	**0**	**100**	**200**	**300**
f(D)	**-340**	**-186**	**-26**	**+138**

La raíz esta entre [200,300]

b)

BIsección

Di	**Dr**	**Ds**	**Err**
200	**250**	**300**	**50**
200	**225**	**250**	**25**
200	**212.5**	**225**	**12.5**

Raíz aproximada en la segunda iteración: Dr=212.5

c) Newton-Raphson:

$$f(D) = \frac{(D-100)^2}{4000} + \frac{\pi\,(D+100)}{2} - 500$$

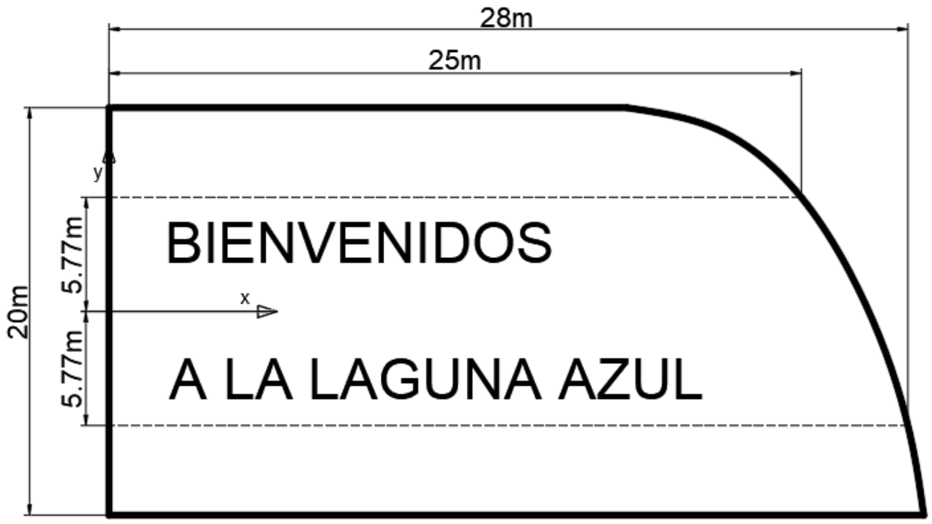
$$f'(D) = \frac{D}{2000} + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{20}$$

$$D^{n+1} = D^n - \frac{f(D^n)}{f'(D^n)}$$

Raíz Aproximada	Error
212.5	----
216.1643611668633	3.664361166863301
216.1623003098534	0.002060857009951
216.1623003092015	6.518519057863159e-10

Problema 2

Para el costeo del mantenimiento de un cartel publicitario con una forma especial, se desea estimar su área. Por el difícil acceso solo logran realizar 2 medidas horizontales indicadas en la figura. Con esta información y utilizando algún método numérico desarrollado en clase, estime el área. (Sugerencia: Gire la figura 90° antihorario)



Se pide:

a) **(1P)** Determine que método numérico recomienda utilizar, justifique.

b) **(3P)** Estime el área del cartel utilizando el método numérico del item a).

Solución

a) Luego de analizar la información disponible se llega a la conclusión de que el método numérico a utilizar debe ser Gauss-Legendre con 2 puntos:

Puntos	Factor de ponderación	Argumentos de la función
2	$c_0 = 1.0000000$	$x_0 = -0.577350269$
	$c_1 = 1.0000000$	$x_1 = 0.577350269$

Dada la distribución de las medidas horizontales, estas están distribuidas justo en la misma proporción aproximada que lo puntos de dadas por Legendre.

Además, es conveniente girar 90° la imagen para poder acomodar al método.

b)

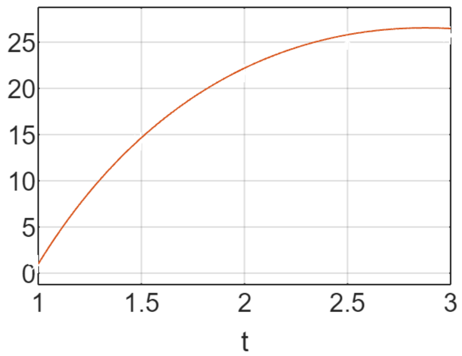
$$\boldsymbol{Area} = \int_a^b f(x)dx \approx (c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1))\left(\frac{b-a}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{Area} \approx (25 + 28)(10) = 530m^2$$

Problema 3

La ecuación que representa la dinámica de una trayectoria de un proyectil:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{dy}{dt} = -10$$



Con las condiciones de frontera:

$y(1) = 1$, $\frac{dy(3)}{dt} = -1.2$

Realice el estudio de t vs y en los puntos entre:

$1 \leq t \leq 3$, usando $\Delta t = 0.5$ seg.

Se pide:

a) **(0.5P)** Determine los nodos ($\boldsymbol{t_i}$ uniformemente distribuidos).
b) **(2.0P)** Aplique el método de las diferencias finitas para resolver este problema. Primero debe formar un sistema de ecuaciones algebraicas y luego resolver los valores de y_i .
c) **(1.5P)** Al Convertir el problema en un problema de valor inicial considerando, $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t_0} = \mathbf{38}$ se obtuvo **y(s0) =28.24** y cuando se cambio de pendiente $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t_0} = \mathbf{35}$, se obtuvo **y(s1) =24.94** (Valores obtenidos con ODE45). Obtenga una mejor aproximación a la pendiente inicial **s2** y resuelva el problema usando el **método de Euler** con el mismo paso que realizó el método de las diferencias finitas. El valor exacto (Blanco) es **26.48** con todas sus cifras exactas. ¿Cómo explica el error cometido al realizar el método de Euler?

Solución

a) N=4 ➔ a=1; b=3; N=4 ➔ $h = \frac{b-a}{N}$=0.5

$$\frac{dy(3)}{dt} = \frac{y_f - y_3}{2h} = -1.2$$

$y_o = 1$ $y_1 = ?$ $y_2 = ?$ $y_3 = ?$ y_f ?

$t_0 = 1$ $t_1 = 1.5$ $t_2 = 2.0$ $t_3 = 2.5$ $t_f = 3{,}0$

b)

$$\left(1 - \frac{h}{2x_i}\right)y_{i-1} - 2y_i + \left(1 + \frac{h}{2x_i}\right)y_{i+1} = -10h^2$$

$$\begin{pmatrix} -2 & \frac{7}{6} & 0 & 0 \\ \frac{7}{8} & -2 & \frac{9}{8} & 0 \\ 0 & \frac{9}{10} & -2 & \frac{11}{10} \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.3333 \\ -2.5 \\ -2.5 \\ -1.2 \end{pmatrix}$$

Solución: $y = \begin{pmatrix}1 & 14.32 & 21.69 & 25.20 & 25.802\end{pmatrix}^T$

c)Método del disparo- Secante

Pendiente mejorada:

$$B = 26.48\ , s_0 = 38, s_1 = 35, y_N s_o = 28.24\ , y_N s_1 = 24.94$$

$$s_2 = s_0 + \frac{(B - y_N s_o)(s_1 - s_0)}{y_N s_1 - y_N s_0} = 36.4$$

$$z'_1 = z_2 \qquad z_{1(1)} = 1$$

$$z'_2 = -\frac{1}{t} z_2 - 10 \qquad z_{2(1)} = s_2$$

$$F(t,z) = \begin{bmatrix} z_2 \\ -\frac{1}{t_i} z_2 - 100 \end{bmatrix}$$

$$Z^{(i+1)} = Z^{(i)} + hF\left(x_i, Z^{(i)}\right)$$

$$i = 0\ ,\ t_0 = 1 \qquad z^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 36.4 \end{bmatrix} \quad h = 0.5$$

$$Z^{(1)} = Z^{(0)} + hF\left(t_0, Z^{(0)}\right) = \begin{bmatrix} 19.2 \\ 13.2 \end{bmatrix}$$

$$Z^{(2)} = Z^{(1)} + hF\left(t_1, Z^{(1)}\right) = \begin{bmatrix} 25..8 \\ 3.8 \end{bmatrix}$$

$$Z^{(3)} = Z^{(2)} + hF\left(t_2, Z^{(2)}\right) = \begin{bmatrix} 27.7 \\ -2.15 \end{bmatrix}$$

$$Z^{(4)} = Z^{(3)} + hF(t_3, Z^3) = \begin{bmatrix} 26.62 \\ -6.72 \end{bmatrix}$$

Diferencias finitas y(3)≈ 25.8

Euler : y(3))≈ 26.62

Valor exacto: **y (3) = 26.48**

Debería tener error cero con el método de Euler, pero h es muy grande. Se recomienda h<=0.1.