SOLUCIONARIO DEL EXAMEN PARCIAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS
PA 2023_1

PARTE I

Responda a las siguientes preguntas

1. **(1P)** Evalúe $e^{-0.5}$ usando las siguientes expresiones

$$
\begin{aligned}
e^{-x} &= 1 - x + \frac{x^2}{2} \\
e^{-x} &= \frac{1}{1 + x + x^2/2}
\end{aligned}
$$

y compare con el valor referencial obtenido en MATLAB de 0.6065. Justifique cualquier de las dos expresiones aproxima mejor utilizando el error relativo porcentual.

Solución:

Reemplazando los valores en cada método:

Para el método 1: $e^{-0.5} \approx 0.6250 \rightarrow \delta_1 \approx 3.05\%$

Para el método 2: $e^{-0.5} \approx 0.5714 \rightarrow \delta_2 \approx 1.46\%$

2. **(1P)** Dada la siguiente **máquina hipotética** basada en la IEEE 754 con las siguientes características: 7 bits en el exponente y tiene de extensión de palabra 16 bits.

Como se escribe el número: -3500.05 (normalizado)

Notación de Máquina:

N=-3500.05 (normalizado)

Solución

Aplicando redondeo al binario mas cercano

Notación de Máquina:

1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0

Notación externa: $(-1)^s(1.M)2^{e_i - bias}$: _____-3504____________(base 10)

Error relativo :_____ $1.1 * 10^{-3}$ _______

El número de cifras significativas exactas: 3 c.s.e.

3. **(1P)**¿Cuál es la principal desventaja del método de eliminación gaussiana sin pivoteo para resolver un sistema de ecuaciones?. Mencione una estrategia para mejorar los resultados. Justifique

Solución:

Debido a que el computador tiene una precisión finita por la capacidad reservada que tiene para los números de coma flotante, esta puede incorporar un error, la cual, a través de operaciones sucesivas, esta se propaga descontroladamente, pudiendo generar errores significativos en la respuesta.

Para mejorar se sugiere cambiar las filas y/o columnas para que el elemento pivotante sea el mayor posible en magnitud para reducir estos errores en cada iteración.

4. (1P) Diga si la siguiente proposición es Verdadero o Falso (V o F):
El método de la factorización LU sin pivoteo puede fallar en algunas matrices "agradables" (invertible $|A| \neq 0$, bien condicionadas $k(A) \approx 57.66$) como, por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Justifique su respuesta.

Solución:

Verdadero (V)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

No existe factorización LU, dado que uno de los elementos pivotes en lo posición (3,3) es igual a cero.

5. **(1P)** Sea los espectros de las matrices A, B y C:

σ(A)={ 1 , 2 , -2}

σ(B)= { -1 , 1 , 2}

σ(C)= { 1 , 2 , 2}

Si aplicamos el método de la potencia inversa, seleccione la alternativa correcta y justifique su respuesta:

a) Será convergente para A y B
b) Será convergente para A y C
c) Será convergente para C y B

Solución

Respuesta b), el método de la potencia inversa converge al valor propio inferior en valor absoluto, solo si este es único.

6. **(1P)** Considerando la matriz $A = \begin{bmatrix} 31 & 41 & -22 \\ 41 & 13 & 5 \\ -37 & -40 & 46 \end{bmatrix}$ y utilizando solamente el teorema de Gershgorin, demuestre que los autovalores de A no pueden ser mayores a 140.

Solución

Se determinan los 3 círculos de Gershgorin

31 +-63

13+-46

46+-77

El mayor valor posible seria 46+77=123, por lo tanto, imposible que sea mayor a 140.

7. **(1P)** Se tiene el espectro de una matriz ordenado en forma ascendente, se desea escribir un programa en MATLAB, que muestre los valores propios diferentes y sus respectivas multiplicidades algebraicas, para lo cual debe completar el código en MATLAB:

```
% multiplicidad.m
Espectro=[1 1 4 4 5]
n=_______________
j=1
k(j)=1
Lambda(j)=__________________
for i=2:n
    if ________________________
        k(j)=k(j)+1
    else
        j=j+1
        k(j)=_________
        Lambda(j)=Espectro(i)
    end
end
disp('Lambda      k')
disp([Lambda' k'])
% Lambda      k
%       1      2
%       4      2
%       5      1
```

Solución

```
Espectro=[1 1 4 4 5]
n=length(Espectro)
j=1
k(j)=1
Lambda(j)=Espectro(1)
```

```
for i=2:n
    if Espectro(i)==Espectro(i-1)
        k(j)=k(j)+1
    else
        j=j+1
        k(j)=1
        Lambda(j)=Espectro(i)
    End
end
disp('Lambda      k')
disp([Lambda' k'])
```

8. **(1P)** Complete el código que detecta si el método de la bisección es seguro para encontrar por lo menos una raíz de una función *f* en el intervalo [a;b].

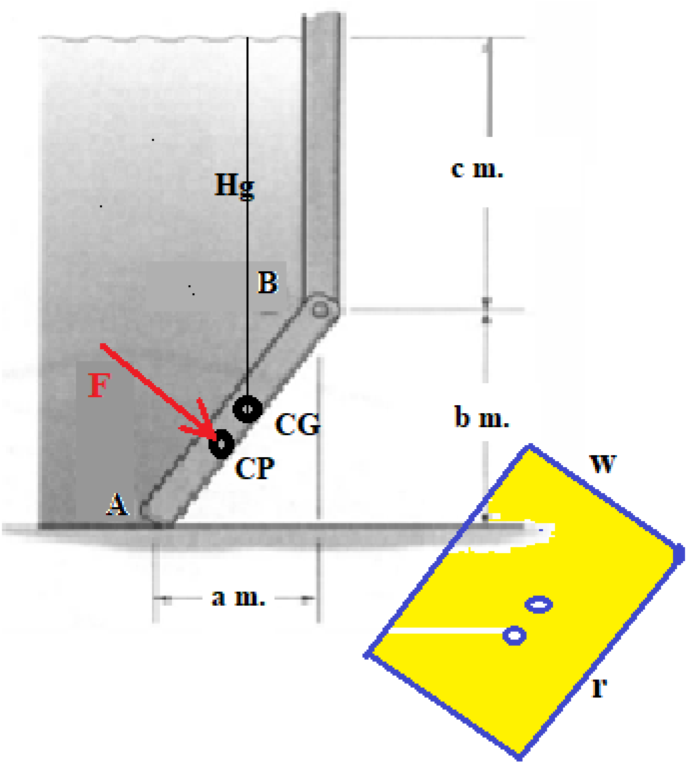
```
function asegura=convergencia_biseccion(f,a,b)
% f : función matemática como cadena.
% a : Extremo izquierdo del intervalo.
% b : Extremo derecho del intervalo.
 ______________________________________________________
if __________________
    asegura=1;
else
    asegura=0;
end
end
```

Solución

```
function asegura=convergenciabiseccion(f,a,b)
f=inline(f);
if f(a)*f(b)<0
    asegura=1;
else
    asegura=0;
end
```

PARTE II

Problema 1



La compuerta rectangular AB tiene w=8±0.01 metros de ancho. Se desea determinar la fuerza hidrostática del agua F que actúa sobre el centro de presión (CP), siendo a=3 m±1%, b=4 m ±2%., c=4.5 m con 1 cifra decimal exacta y el peso específico del agua γ está entre 9801 N/m^3 y 9815 N/m^3.

La fuerza hidrostática se puede calcular con la fórmula: **F= γ Hg A**

Siendo Hg la distancia del centro de gravedad (CG) de la placa al nivel del fluido y A el área rectangular.

a) **(0.5 P)** Aproxime la fuerza hidrostática **F**.

Solución

$$F= \gamma \ Hg \ A$$

$$Hg=c+b/2$$

$$r=(a^2+b^2)^{0.5}$$

$$A=w \ r$$

$$F= \gamma \ (c+b/2) \ w \ (a^2+b^2)^{0.5}$$

F=2550080 Newtons

b) **(2.5 P)** Aplicando propagación de errores de una función multivariable, estime el error absoluto y relativo de la fuerza hidrostática **F**.

Solución

Ea=0.03
Eb=0.08
Ec=0.05
Ew=0.01
γ=(9801+9815)/2=9808
Eγ=(-9801+9815)/2=7
dF_da= 3.0601e+05
dF_db= 6.0417e+05
dF_dc= 392320
dF_dw= 318760
dF_dγ=260

$$\varepsilon F \leq \left|\frac{\partial F}{\partial a}\right| \varepsilon a + \left|\frac{\partial F}{\partial b}\right| \varepsilon b + \left|\frac{\partial F}{\partial c}\right| \varepsilon c + \left|\frac{\partial F}{\partial w}\right| \varepsilon w + \left|\frac{\partial F}{\partial \gamma}\right| \varepsilon \gamma$$

ef= 82138

$$\delta = \frac{|\varepsilon F|}{|F|} = 3.221\ \%$$

c) **(1.0 P)** Aproxime el rango de variación de la fuerza hidrostática F.
Solución

Rango = [nF-ef, nF+ef] = [2467942, 2632218]

Problema 2

Al equilibrar la siguiente reacción química conservando el número de átomos de cada elemento entre reactivos y productos:

$$P_2I_4 + \boldsymbol{a}P_4 + \boldsymbol{b}H_2O \leftrightarrows \boldsymbol{c}H_4I + \boldsymbol{d}H_3PO_4$$

Se necesita encontrar los coeficientes estequiométricos desconocidos $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, y $\boldsymbol{d}$ que vienen dados por la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resuelve los coeficientes estequiométricos desconocidos usando:

a) **(1.5P)** El método de Eliminación Gaussiana con pivoteo parcial.

Solución:

Eliminación Gaussiana con pivoteo parcial

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} f_2 \leftrightarrow f_3 \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} f_4 = f_4 - \tfrac{1}{2} f_2 \rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix} f_3 \leftrightarrow f_4$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} f_4 = f_4 + \tfrac{1}{2} f_3 \rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & 4 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} 1.3 \\ 12.8 \\ 4.0 \\ 3.2 \end{bmatrix}$$

b) **(1.5P)** Si cambia la fila 2 con la fila 3 del sistema. ¿Es posible decir que ambos métodos iterativos para resolver sistemas lineales convergen? Justifique. No realice iteraciones.

Solución:

$$Tj = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & -\lambda & 2 & 3/2 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^4 - \tfrac{3}{8}\lambda^2 = 0 \Rightarrow \rho(T_j) = \sqrt{\tfrac{3}{8}}$$

$$Tgs = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 3/8 \end{bmatrix} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & -\lambda & 2 & 3/2 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/8-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^4 - \tfrac{3}{8}\lambda^3 = 0 \Rightarrow \rho(T_j) = \tfrac{3}{8}$$

Ambos convergen, pero más rápido será el método de GS.

c) **(1P)** Realice 2 iteraciones con el método más rápido en convergencia. Use como vector de inicio al vector nulo. ¿Se cumple la respuesta dada en b?

Solución:

$$x^{(i+1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 3/8 \end{bmatrix} x^{(i)} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

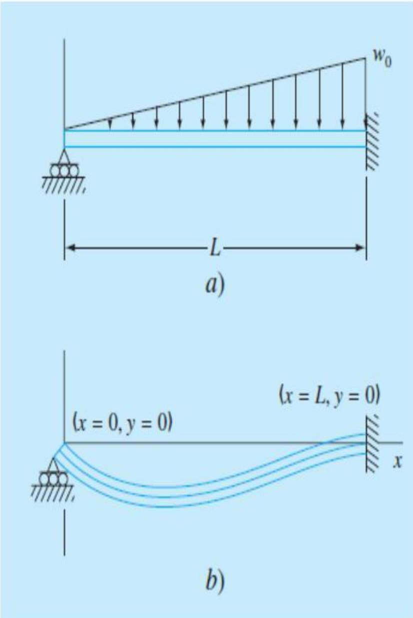
$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to 1.3 \\ \to 12.8 \\ \to \quad 4 \\ \to 3.2 \end{array}$$

Se dará la convergencia pero requiere una mayor cantidad de iteraciones.

Problema 3

En la siguiente figura se muestra una viga uniforme sujeta a una carga distribuida uniformemente que crece de forma lineal. La ecuación para la curva elástica resultante es la siguiente:

$$y = \frac{w_0}{120EIL}[-x^5 + 2L^2x^3 - L^4x]$$



Utilice los valores siguientes para los parámetros: $L = 600$ cm, $E = 50000\text{kN/cm}^2, I = 30000\text{ cm}^4$ y $w_0 = 2.5\text{kN/cm}$.

Se pide determinar el punto de máxima deflexión (es decir, el valor de la raíz r donde $dy/dx = 0$). Para lo cual debe realizar los siguientes pasos:

a) (**1P**) Localice la raíz o raíces de la ecuación con intervalos de longitud 1. Seleccione el(los) intervalos que asegure la existencia de al menos una raíz según el Teorema de Bolzano.
   - $[268; 269]$
   - $[269; 270]$
   - $[270; 271]$

Solución:

$$y' = \text{f(x)} = \frac{w_0}{120EIL}[-5x^4 + 6L^2x^2 - L^4] = 0$$

f(268)<0

f(269)>0

Existe una raíz en el intervalo [268;269]

b) (**1P**) A partir del intervalo inicial obtenido en (a) aplique el método de la bisección para aproximar la raíz realizando 02 iteraciones e indique el error en cada iteración.

Solución:

a	b	c	$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$	error
268.0000	269.0000	268.5000	-	+	+	0.5000
268.0000	268.5000	268.2500	-	+	-	0.2500
268.2500	268.5000	268.3750	-	+	+	0.1250

c) (**1P**) A partir de $y'(x) = \mathrm{f(x)} = 0$, verifique que el arreglo dado por la expresión:

$$x = \sqrt{\frac{600^4}{6 * 600^2 - 5x^2}} = g(x)$$

es un **algoritmo del punto fijo.** Justifique la convergencia en el dominio en el intervalo seleccionado en el item (a).

Solución:

$$\sqrt{\frac{600^4}{6 * 600^2 - 5x^2}} = g(x)$$

$$g'(268) = 0.1996 < 1$$

$$g'(269) = 0.2008 < 1$$

d) **(1P)** Realice tres iteraciones con el **algoritmo del punto fijo**, usando como valor inicial x_0 igual a la última iteración obtenida en el ítem b)

Solución:

X0=268.3750

X1=268.3375

X2=268.3300