EXAMEN SUSTITUTORIO DE MÉTODOS NUMÉRICOS (MB536)

PARTE I

Responda a las siguientes preguntas:

1. **(1 P)** Sea el siguiente sistema de punto flotante basado en la norma IEEE-754:

   Signo (1) – Exponente (3) – Mantisa (4)

   Determine el almacenamiento binario del número 20 en este sistema de 8 bits.

Solución

El máximo número normalizado (realmax) en este sistema hipotético es:

X=(-1)^(0)*(1.1111)*2^(110-3)

X=15.5

Por lo tanto, el 20 produciría un desbordamiento de rango OVERFLOW y se almacenará como +Inf

0 111 0000

2. **(1 P)** Sea la siguiente ecuación diferencial ordinaria de orden superior:

   x'''=4x+2t+5x'+6x''

   x(0)=1;   x'(0)=2;   x''(0)=3

   Aplique Euler con h=0.05, para aproximar x(0.05), x'(0.05) y x''(0.05).

Solución

Reducción a 1er orden:

x'=z   x(0) =1

z'=w   z(0)= 2

w'=4x+2t+5z+6w   w(0)=3

$t_0=0$, $x_0=1$, $z_0=2$, $w_0=3$

$t_1=t_0+h=0.05$

$x_1=x_0+h*z_0=1+0.05*2=1.1$

$z_1=z_0+h*w_0=2+0.05*3=2.15$

$w_1=w_0+h*(4x_0+2t_0+5z_0+6w_0)=3+0.05*(4*1+2*0+5*2+6*3)=4.6$

3. **(1 P)** Dada la siguiente función $f(x) = e^x x^2$. Determine el número de cifras significativas al aproximar $f'(x)$ en $x = 2, h = 0.01$ utilizando la siguiente fórmula:

Aproximación de la primera derivada con cinco puntos:

$(x_0 - 2h; f(x_0 - 2h)), (x_0 - h; f(x_0 - h)), (x_0 + h; f(x_0 + h)), (x_0 + 2h; f(x_0 + 2h))$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 - 2h) - 8f(x_0 - h) + 8f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h))}{12h}$$

Solución

Utilice como mínimo 10 cifras decimales en sus cálculos para no perder precisión.

Valor aproximado: 59.112448683069140

Valor Exacto: 59.112448791445203

$$\delta_r = 1.833410^{-09} < 5 \times 10^{-9}$$

Se aproxima con 9 cifras significativas.

4. **(1 P)** La concentración de una sustancia contaminante en un lago depende del tiempo y viene dada por:

$$C(t) = 70e^{\beta t} + 20e^{\omega t}$$

Se adoptaron algunas medidas que se registraron en el cuadro siguiente:

t	1	2
$C(t)$	27.5702	17.6567

Plantear el sistema lineal al usar la primera iteración del método de Newton con valor inicial $\beta_0 = 0$ y $\omega_0 = -1.9$, donde las variables a determinar serían $(\Delta\beta, \Delta\omega)$.

Solución

$$b = -F(\beta, \omega) = -\begin{bmatrix} 70e^{\beta} + 20e^{\omega} - 25.5702 \\ 70e^{2\beta} + 20e^{2\omega} - 17.6567 \end{bmatrix}$$

$$A = J_F(\beta, \omega) = \begin{bmatrix} 70e^{\beta} & 20e^{\omega} \\ 140e^{2\beta} & 40e^{2\omega} \end{bmatrix}$$

valor inicial $\beta_0 = 0$ y $\omega_0 = -1.9$

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} 70 & 2.99 \\ 140 & 0.89 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\beta \\ \Delta\omega \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 45.42 \\ 52.78 \end{bmatrix}$$

5. **(1 P)** Encontrar los valores A, B y C tal que la cuadratura

$$\int_1^4 f(x)dx \approx Af(1) + Bf(3) + Cf'(4)$$

Sea exacta para los polinomios cuyo grado son menores iguales a 2.

Solución

$$\begin{cases} f(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad A + B = \int_1^4 dx = 3 & (1) \\ f(x) = x \quad \Rightarrow \quad A + 3B + C = \int_1^4 x dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{x=1}^{x=4} = \frac{15}{2} & (2) \\ f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad A + 9B + 8C = \int_1^4 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{x=1}^{x=4} = \frac{63}{3} = 21 & (3) \end{cases}$$

$$A = \frac{3}{4} \quad , \quad C = 0$$

$$\int_1^4 f(x)\,dx = \frac{3}{4}f(1) + \frac{9}{4}f(3)$$

6. **(1P)** Si un vehículo parte desde el origen de un sistema de referencia cartesiano, recorriendo en línea recta en dirección del eje x positivo y el conductor registra las siguientes velocidades instantáneas:

Tiempo(seg)	1.12702	5	8.87295
Velocidad(m/s)	20	50	45

Estime la distancia recorrida hasta el instante 10 seg.

Sugerencia. - Utilice cuadratura de Gauss-Legendre.

Solución

Se observa que el tiempo tiene una distribución simétrica para los 10 segundos, y luego se verifica que los 3 instantes se corresponden con la distribución de las raíces del polinomio de Legendre de grado 3. Por lo tanto:

$$distancia = \int_0^{10} v(t)dt$$

$$\approx (0.55555 * 20 + 0.88888 * 50 + 0.55555 * 45) * \frac{10-0}{2}$$

$distancia = 402.7738$ metros

7. **(1 P)** Dada la siguiente ecuación diferencial de Vander Pol (modelo de un oscilador en circuitos eléctricos) de orden superior:

   $y'' + \epsilon(y^2 - 1)y' + y = 0,\ \ y(0) = 1,\quad y'(0) = 0$
   con $\epsilon = 1$.

   Complete la siguiente función en Matlab de tal forma que permita convertir la EDO de segundo orden en un sistema EDOs de primer orden.

Solución

```
 function dxty = vanderpol(t,x)
%Evalua la ecuacion de Van der Pol para eps=1
ep = 1;
dxty = [x(2); ep*(1-x(1)^2)*x(2)-x(1)];
end
```

8. **(1 P)** Estime la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$2x_1x_2 + x_1^3 + 5x_2 = 0$$

$$x_2^3 + x_1 sen(x_2) - x_2^2 = 0$$

Utilizando el método de Newton Raphson, partiendo de x_1 =100 y x_2=100 ; considere como criterio de parada; el error con la norma euclidiana la cual debe ser menor a 1e-13.

Complete el siguiente programa:

```
clc;syms x1 x2;
F=@(x1,x2)[2*x1*x2+(x1^2)*x1+5*x2
  x2^3+x1*sin(x2)-x2^2];
J=@(x1,x2)[3*x1^2+2*x2    2*x1+5;  sin(x2)   x1*cos(x2)-2*x2+3*x2^2];
X=[100 100]';Xa=X;
ermax=1e-13;
nmax=1e10;
for i=1:nmax
   x1=X(1);x2=X(2);
   X=X-inv(J(x1,x2))*F(x1,x2);
   er=norm(X-Xa,2);
   if er<ermax
      break
   end
   Xa=X;
end
fprintf('La solución es:\nx1=%.13f\nx2=%.13f \n',X(1),X(2))
```

PARTE II

Problema 1

Un móvil se desplaza a lo largo del eje x de acuerdo con la siguiente expresión:

$$x = e^{at}\left(C_1\, cos(b\, t) + C_2\, sen(b\, t)\right) \qquad a = -\frac{1}{2} \qquad b = 2$$

a) **(0.5 P)** Si el móvil parte del **reposo** desde la posición x=1, determine C_1 y C_2
b) **(1.0 P)** Se desea determinar el tiempo cuando el móvil pasa por x=0 por primera vez, aplique **Bolzano** en los siguientes intervalos [0.25,0.5]; [0.5,0.75]; [0.75,1].
c) **(1.0 P)** Efectué 02 iteraciones de **bisección** partiendo del intervalo obtenido en b) y estime el error.
d) **(1.5 P)** Realice 02 iteraciones de Newton-Raphson partiendo de la aproximación obtenida en el ítem c) y estime el error.

Solución

a)

t=0   x=1   dx/dt=0

$C_1=1$ $C_2=1/4$

b)

$$x(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left(cos(2\,t) + 1/4\,sen(2\,t)\right) == 0$$

x(0.25)= 0.8802

x(0.5)= 0.5846

x(0.75)= 0.2200

x(1)= -0.1145

por lo tanto, existe por lo menos una raíz en el intervalo [0.75,1]

c)

Bisección

ti	tr	ts	Err
0.75	0.875	1	0.125
0.875	0.9375	1	0.0625
0.875	0.90625	0.9375	0.03125

d) Newton-Raphson

t_0=0.90625

$$x'(t) = -\frac{17}{8}\,e^{-\frac{t}{2}}\,sen(2\,t)$$

$$t_{n+1}=t_n-x(t_n)/x'(t_n)$$

t	**err**
0.90625	**----**
0.907886161207599	**0.001636161207599**
0.907887494959991	**1.333752391530219e-06**

Problema 2

Para el perfil aerodinámico, la fuerza de sustentación, F_S, puede calcularse a partir de las medidas de la velocidad del aire u a lo largo de la superficie mediante integración:

$$F_S = \frac{1}{2}\rho U^2 L \int_0^c \left[\left(\frac{u}{U}\right)^2 - 1\right] dx$$

donde L es la longitud del ala, ρ es la densidad, y u/U se mide en función de x como se indica a continuación:

$x\ (m)$	0	0.0125	0.025	0.0375	0.05
u/U	0	0.969	1.241	1.279	1.279

Se desea determinar la fuerza de sustentación para un ala de $L = 3$ m de longitud y longitud de cuerda $c = 0.05$ m, si la velocidad $U = 160$ km/h y $\rho = 1.225$ kg/m ^{3}.

a) **(1.5 P)** Mediante la fórmula del trapecio compuesto.
b) **(2.5 P)** Mediante la fórmula de Simpson 1/3 compuesto.

Solución

(a)

Primero, calculamos la integral por la Regla del Trapecio compuesto

$$\int_0^c \left[\left(\frac{u}{U}\right)^2 - 1\right] dx \approx \frac{x_1 - x_0}{2}\left(\left[\left(\frac{u_0}{U}\right)^2 - 1\right] + 2\sum_{j=1}^{3}\left[\left(\frac{u_j}{U}\right)^2 - 1\right] + \left[\left(\frac{u_4}{U}\right)^2 - 1\right]\right)$$
$$= 0.01166 = I_1$$

Segundo, obtenemos una aproximación de la fuerza de sustentación

$$F_1 = \frac{1}{2}\rho U^2 L I_1 = 42.32148$$

(b)

Primero, calculamos la integral por la Regla de Simpson 1/3 compuesto

$$\int_0^c \left[\left(\frac{u}{U}\right)^2 - 1\right] dx$$
$$\approx \frac{x_1 - x_0}{3}\left(\left[\left(\frac{u_0}{U}\right)^2 - 1\right] + 4\sum_{j=1,3}\left[\left(\frac{u_j}{U}\right)^2 - 1\right] + 2\left[\left(\frac{u_2}{U}\right)^2 - 1\right]\right.$$
$$\left. + \left[\left(\frac{u_4}{U}\right)^2 - 1\right]\right) = 0.01256 = I_2$$

Segundo, obtenemos una aproximación de la fuerza de sustentación

$$F_2 = \frac{1}{2}\rho U^2 L I_2 = 45.58815$$

Problema 3

La ecuación que representa la pérdida de calor, T, por una aleta del avión es la siguiente:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - aT = -aT_{ambiente}$$

Con las condiciones frontera:

$T(0) = T_{pared}$ y $dT(L)/dx = 0$

La segunda condición considera que la pérdida de calor en la punta de la aleta es insignificante, pues su longitud L es mayor que su grosor.

Para $a = 20m^{-2\circ}C^{-1}$, $L = 0.3m$, y $T_{pared} = 200°C$, y $T_{ambiente} = 20°C$, estime la temperatura en **4 puntos igualmente espaciados de la aleta (incluido punto inicial)**.

Se pide:

a) **(0.5P)** Determine los nodos (x_i uniformemente distribuidos), cambie la Variable $T \rightarrow y$.

b) **(1.5P)** Aplique el método de las diferencias finitas para resolver este problema. Primero debe formar un sistema de ecuaciones algebraicas y luego resolver los valores de y_i .

c) **(2.0P)** Convertir el problema en un problema de valor inicial considerando, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0} = -702$ y resuelva el problema con el mismo paso de a), usando Taylor de orden 2.

Compare sus resultados con los valores anteriores. ¿Cuál será el método más adecuado para resolver este problema? Justifique. Valor exacto: **y (0.3) = 108.9°C**.

Solución

a) N+1=4 ➔ a=0; b=0.3; N=3 ➔ $h=\frac{b-a}{N}$=0.1

$$\frac{dy(0.3)}{dx}=\frac{y_f-y_2}{2h}=0$$

$y_o=200$ $\quad y_1=?$ $\quad y_2=?$ $\quad y_3=?$ $\quad y_f=y_2$

$x_0=0$ $\quad x_1=0.1$ $\quad x_2=0.2$ $\quad x_3=0.3$ $\quad x_f$

b) $y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}-20h^2y_i=-400h^2$

$y_{i-1}-2.2y_i+y_{i+1}=-4$

$$\begin{pmatrix}-2.2 & 1 & 0\\ 1 & -2.2 & 1\\ 0 & 2 & -2.2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-204\\ -4\\ -4\end{pmatrix}$$

Solución: $y=\ (146.28\quad 117.82\quad 108.93)^T$

c) Algoritmo de Taylor de Orden 2:

$z'_1=z_2$ $\qquad z_{1(0)}=200$

$z'_2=\ 20z_1-400$ $\qquad z_{2(0)}=-702$

$F(x,z)=\begin{bmatrix}z_2\\ 20z_1-400\end{bmatrix}$ $\qquad F'(x,z)=\begin{bmatrix}20z_1-400\\ 20z_2\end{bmatrix}$

$$Z^{(i+1)}=Z^{(i)}+hF\left(x_i,Z^{(i)}\right)+\frac{h^2}{2}hF'\left(x_i,Z^{(i)}\right)$$

$i=0\ ,\ x_0=0$ $\qquad z^{(0)}=\begin{bmatrix}200\\ -702\end{bmatrix}$

$$Z^{(1)}=Z^{(0)}+hF\left(x_0,Z^{(0)}\right)+\frac{h^2}{2}hF'\left(x_0,Z^{(0)}\right)=\begin{bmatrix}147.8\\ -412.2\end{bmatrix}$$

$$Z^{(2)}=Z^{(10)}+hF\left(x_1,Z^{(1)}\right)+\frac{h^2}{2}hF'^{\left(x_1,Z^{(1)}\right)}=\begin{bmatrix}119..36\\ -197.82\end{bmatrix}$$

$$Z^{(3)}=Z^{(2)}+hF\left(x_2,Z^{(2)}\right)+\frac{h^2}{2}hF'^{\left(x_2,Z^{(2)}\right)}=\begin{bmatrix}109.51\\ -18.82\end{bmatrix}$$

Diferencias finitas y(0.3)≈ 108.93

Taylor de orden 2 : y(0.3))≈ 109.51

Valor exacto: **y (0.3) = 108.9**

El método más acertado para este problema es el método de las diferencias finitas.