PARTE I

Responda a las siguientes preguntas

1. **(1 P)**

Dos estaciones eléctricas van a proporcionar energía a cierta región de la forma más económica posible. El costo total de la operación de las dos estaciones está dado por:

$$f(x_1, x_2) = 0.1 + 0.01x_1x_2 + 0.15x_2^4 + 0.01x_1^4 - 0.25(x_1 + x_2 - 100)$$

Donde: x_1 y x_2 representan la energía producida por la primera y segunda estación respectivamente. Se requiere determinar los valores de x_1 y x_2 con el fin de minimizar $(\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0)$ el costo total de las dos estaciones.

Utilice como aproximación inicial el punto $(2.0, 0.5)^T$. Convierta el sistema no lineal en un sistema lineal en la **primera iteración** de Newton Raphson.

Completar lo que falta:

(0.5P) Sistema No Lineal:

$$\begin{array}{l} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} & = & 0 \\ & = & 0 \end{array} \right.$$

(0.5P) Sistema Lineal:

Aproximación inicial el punto $(2.0, 0.5)^T$.

$$\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

2. **(1 P)** Sea la siguiente tabla:

X	1	2	4
Y	9	11	M

Al aplicar Lagrange, se obtiene el siguiente polinomio:

$$P(x) = \frac{(x-2)}{(1-2)}\frac{(x-4)}{(1-4)}(a+b) + \frac{(x-1)}{(2-1)}\frac{(x-4)}{(2-4)}(a+c) + \frac{(x-1)}{(4-1)}\frac{(x-2)}{(4-2)}(b+c)$$

Si $P(3) = 10$, obtener: $a + b - c$

3. **(1 P)** Dada la siguiente tabla:

t	0	1	t_2
y	1	3	y_2

Si el **<u>spline cúbico natural</u>** para los dos intervalos es:

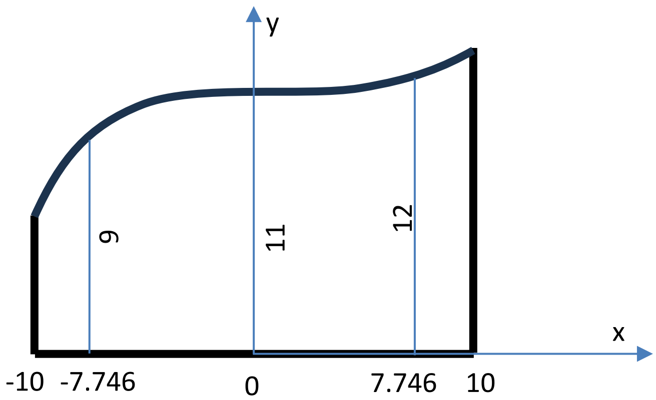
$$S(t) = \begin{cases} S_0(t) = 1 + \frac{29}{12}t - \frac{5}{12}t^3 & t \in [0,1] \\ S_1(t) = 3 + \frac{7}{6}(t-1) - \frac{5}{4}(t-1)^2 + \frac{5}{24}(t-1)^3 & t \in [1, t_2] \end{cases}$$

halle el punto (t_2, y_2)

4. **(1 P)** A partir de la serie de Taylor:
   $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + f''(a)\frac{h^2}{2!} + f'''(a)\frac{h^3}{3!} + \cdots$
   Demuestre la siguiente fórmula que aproxima la segunda derivada de una función:

$$f''(x) \approx \frac{3f(x+h) + f(x-3h) - 4f(x)}{6h^2}$$

5. **(1 P)** Aproxime el área de una pared utilizando el método de cuadratura de Gauss -Legendre cuya base mide 20m, en la figura se ubica un sistema de referencias cartesianos en medio de la base y se registran las siguientes medidas en metros.



6. (**1P**) Sea la EDO de primer orden:

$$y' = xy + 1, \qquad y(0) = 1$$

El algoritmo de Taylor de orden 2 para resolver este problema es:

(0.5P)

$y(i+1) = y(i) + h$ (______________) + $\frac{h^2}{2}$(__________________________)

(0.5P) Al dar un paso de integración con h=0.25 el valor será igual a:________

7. **(1 P)** Sea desea ajustar por mínimos cuadrados, el conjunto de datos (x, y) con una función de la forma:

$$e^y = \frac{y+1}{a + bx + cx^2}$$

Se desea obtener a, b, c y el factor de regresión r^2, complete la siguiente función *MATLAB*

function [a,b,c,r2]=calcula(x,y)

Y=________________________ % Y=Y(y) Nuevo vector.

p=polyfit(x,Y,2);

a=__________

b=p(2);

c=__________

Ys=polyval(p,x);

Ym=mean(Y);

r2=_______________________

end %Fin de la función

8. **(1 P)** Complete el siguiente script para aproximar $\int_0^{20}(sen(4x)e^{0.001x} + 20)\,dx$, usando el método de Simpson de 3/8 con 1000 puntos igualmente espaciados.

f =________________

a=0; b=20; n=1000;   %n : número de puntos

x=linspace(a,b,n);

h=(b-a)/(n-1);

y=f(x);

coef=y*0+1;   % pesos iniciales

coef(2:3:end-1)=___;

coef(3:3:end-1)=___;

coef(4:3:end-1)=___;

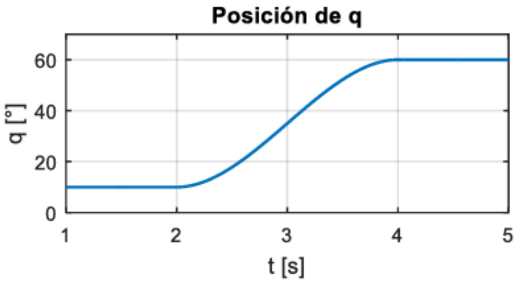
I=______________;

fprintf('La integral es %.2f\n',I);

PARTE II

Problema 1

Se desea calcular la trayectoria cúbica q(t) de un robot (de una articulación) de q (2 s) =10° a q (4 s) = 60° con velocidad inicial y final nula para lo cual se pide:



a) **(1.5 P)** Usando la forma el polinomio interpolante (en forma matricial) determine los **coeficientes** del siguiente polinomio cúbico que representa la **posición angular** $q(t)$.

Posición: $q(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$

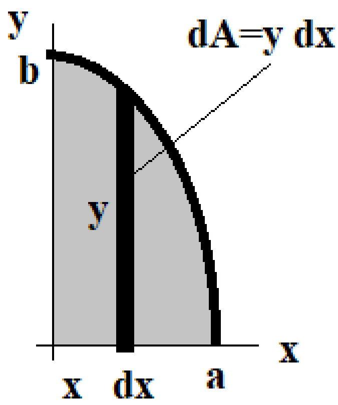
Velocidad: $\dot{q}(t) = 3a_3 t^2 + 2a_2 t + a_1$

b) **(2.0 P)** Considerando un punto adicional q (3 s) = 35°, forme los splines forzados.

c) **(0.5 P)** Use el polinomio obtenido en a) e interpole para q (3 s) compare este resultado con el spline en b). Comente sus resultados.

Problema 2

Se desea evaluar el momento de inercia con respecto al eje y de un cuarto de elipse como se muestra en la siguiente figura:



Ecuación de la elipse: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

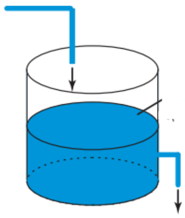
Momento de inercia con respecto al eje y: $I_y=\int_0^a x^2 dA$

Si $a=2,\ b\ =3$, aproxime I_y:

a) **(1.5 P)** Mediante la fórmula de Simpson 1/3 tomando m=4 parábolas
b) **(1.5 P)** Mediante la cuadratura de Gauss, con 3 puntos.
c) **(1.0 P)** Si el valor exacto es $\frac{3\pi}{2}$, determine el error en a) y b) y comente sus resultados.

Problema 3

Una piscina contiene 10000 litros de agua de los cuales el 0.01% es cloro, empezando en $t = 0$ se empieza a bombear agua que contiene el 0.001% de cloro hacia el interior de la piscina a razon de 5 litros por minuto, mientras que el agua de la piscina fluye hacia el exterior de la piscina a la misma velocidad (5 litros por minuto).



a) **(1.0 P)** Si $V(t)$ denota el volumen de cloro en el instante t, **verifique** que el modelo del proceso en mención es el siguiente problema de valor inicial (Indique la condición inicial):

$$\frac{dV}{dt} = 0.00005 - 0.0005\text{V}$$

b) **(2.0 P)** Halle el volumen aproximado de cloro al cabo de 1 minuto, utilizando el método de Heun y un tamaño de paso $h = 0.5$ minutos. Utilice como mínimo 8 cifras decimales en sus cálculos para no perder precisión.

c) **(1.0 P)** Sabiendo que la solución exacta es:

$$V(t) = 0.1 + 0.9e^{-\frac{t}{2000}}$$

determine el número de cifras significativas con el cuál se aproxima el volumen encontrado en el ítem (b).

EXAMEN FINAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

SOLUCIONARIO (Parte I)

P1

Sistema No lineal

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0.01x_2 + 0.04x_1^3 - 0.25 &= 0 \\ 0.01x_1 + 0.60x_2^3 - 0.25 &= 0 \end{cases}$$

Sistema Lineal

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.12x_1^2 & 0.01 \\ 0.01 & 1.80x_2^2 \end{pmatrix}$$

Aplicado en el punto $(2.0, 0.5)^T$

$$\begin{pmatrix} 0.48 & 0.01 \\ 0.01 & 0.45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}^{(1)} = -\begin{pmatrix} 0.075 \\ -0.155 \end{pmatrix}$$

P2

M=6 a=7 b=2 c=4

a+b-c=5

P3

$$S_1'(t) = \frac{7}{6} - \frac{5}{2}(t-1) + \frac{5}{8}(t-1)^2$$

$$S_1''(t) = -\frac{5}{2} + \frac{5}{4}(t-1)$$

$$S_1(t_2) = -\frac{5}{2} + \frac{5}{4}(t_2 - 1) = 0 \to t_2 = 3$$

Evaluando

$$S_1(3) = 2 = y_2$$

P4

$$3f(x+h) \approx 3f(x) + 3hf'(x) + \frac{3h^2}{2!}f''(x) \;...(1)$$

$$f(x-3h) \approx f(x) - 3hf'(x) + \frac{9h^2}{2!}f''(x) ...(2)$$

(1)+(2) $3f(x+h) + f(x-3h) \approx 4f(x) + 6h^2 f''(x)$

$$f''(x) \approx \frac{3f(x+h) + f(x-3h) - 4f(x)}{6h^2}$$

P5

Aplicando Gauss Legendre de 3 puntos, y calculando el área en m^2

$$A := (9 \cdot 0.5555 + 11 \cdot 0.8888 + 12 \cdot 0.5555) \cdot \frac{(10 - -10)}{2} = 214.423$$

P6

Sea la EDO de primer orden:

$$y' = xy + 1, \qquad y(0) = 1$$

El algoritmo de Taylor de orden 2 para resolver este problema es:

$$y(i+1) = y(i) + h(x(i) * y(i) + 1) + \frac{h^2}{2}(x(i) + y(i) + x(i)^2 * y(i))$$

Al dar un paso de integración con h=0.25 el valor será igual a: 1.2812

P7

```
function [a,b,c,r2]=calcula(x,y)
        Y=(y+1)./exp(y);
        p=polyfit(x,Y,2);
        a=p(3);
        b=p(2);
        c=p(1);
        Ys=polyval(p,x);
        Ym=mean(Y);
        r2=sum((Ys-Ym).^2)/sum((Y-Ym).^2);
```

P8

```
f=@(x) 10*sin(2*x).*exp(0.03*x)+20
a=0;b=20;n=1000;
x=linspace(a,b,n);
h=(b-a)/(n-1);
y=f(x);
coef=y*0+1;
coef(2:3:end-1)=3;
coef(3:3:end-1)=3;
coef(4:3:end-1)=2;
I=(3*h/8)*(coef*y');
fprintf('La integral es %.2f\nComple',I);
```

EXAMEN FINAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

SOLUCIONARIO (Parte II)

Problema 1:

Solución:

a)

$$\begin{bmatrix} 2^3 & 2^2 & 2 & 1 \\ 4^3 & 4^2 & 4 & 1 \\ 3*2^2 & 2*2 & 1 & 0 \\ 3*4^2 & 2*4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 60 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12.5 \\ 112.5 \\ -300 \\ 260 \end{bmatrix}$$

$q(t) = -12.5t^3 + 112.5t^2 - 300t + 260$

b)

t	2	3	4
q(t)	10°	35°	60°

Splines forzados $\dot{q}(2) = 0$ y $\dot{q}(4) = 0$

t	q(t)	h	DDq	Δ
2	10°	1	25	0
3	35°	1	25	
4	60°		---	

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 25-0 \\ 0 \\ 0-25 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 75 \\ 0 \\ -75 \end{bmatrix}$$

a_i	b_i	c_i	d_i
-12.5	37.5	0	10
-12.5		37.5	30

$s_o(t) = -12.5(t-2)^3 + 37.5(t-2)^2 + 10 \qquad 2 \le t \le 3$

$s_1(t) = -12.5(t-3)^3 + 37.5(t-3) \quad + 30 \qquad 3 \le t \le 4$

c.) Interpolar $q(t=3) = -12.5 * 3^3 + 112.5 * 3^2 - 300 * 3 + 260 = 35°$

Obtenemos el mismo valor que el spline forzado.

Problema 2:

a)

Despejando y reemplazando ***y***:

$$Iy = \int_{0}^{2} x^2 \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 x^2}\, dx$$

n=2*m=8 particiones

h=(2-0)/8=0.25

```
Ia=h/3*(f(0)+4*f(0.25)+ f(0.5))
Ib=h/3*(f(0.5)+4*f(0.75)+ f(1))
Ic=h/3*(f(1)+4*f(1.25)+ f(1.5))
Id=h/3*(f(1.5)+4*f(1.75)+ f(2))
I=Ia+Ib+Ic+Id= 4.5840
b) x=t+1
F(t)=(t+1)²*(9-9/4*(t+1)²)
I= 5/9*F(sqrt(3/5))+8/9*F(0)+5/9*F(-sqrt(3/5))=4.8142

c)

Ie= 4.7124

Error_Simpson= 0.1284

Error_Gauss= 0.1018

La cuadratura de Gauss presenta un menor error
```

Problema 3:

(a)

$$\frac{dV}{dt} = \mathrm{r_{in}}c_{in} - r_{out}c_{out} = 5 \cdot \left(\frac{0.001}{100}\right) - 5 \cdot \left(\frac{V}{10000}\right)$$

$$V(0) = 1$$

(b)

i	t_i	v_i	k_1	k_2	v_{i+1}
0	0	1	-0.00045	-0.0004499	0.9997750
1	0.5	0.9997750	-0.0004499	-0.0004498	0.9995501
2	1	0.9995501	-0.0004498	-0.0004497	0.9993252

(c) $\delta_r = \frac{|V_{exacto} - V_{aprox}|}{|V_{exacto}|} = \frac{|0.999550112481252 - 0.9995501|}{0.999550112481252} =$

$= 1.248687005195548 \times 10^{-8} < 5 \times 10^{-8}$

Se aproxima con 8 cifras significativas.