SOLUCIONARIO DEL EXAMEN PARCIAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS
PA 2022-2

PARTE I

Responda a las siguientes preguntas

1. **(1P)** Sea la siguiente expresión: $y = \sqrt{x^2+1} - 1$

Evalúe para x=10^{-10}. Comente su resultado. De qué manera se podría mejorar el valor obtenido.

Reemplazando directamente se obtiene y=0, implica una cancelación por sustracción y perdida de dígitos significativos para valores pequeño de x. Hacemos el siguiente arreglo algebraico:

$$y = \left(\sqrt{x^2+1} - 1\right)\frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}+1}$$

Reemplazando nuevamente y=$5*10^{-21}$, con lo cual se evita el error de cancelación.

2. Se denota con $\mathbb{F}$ al conjunto finito de números reales que tiene representación exacta llamado números de punto flotante

$$\mathbb{F} = \{(-1)^s \times 1.m \times 2^E\} \cup \overbrace{\{0, -\infty, +\infty, \mathrm{NaN}\}}^{\text{Valores especiales}}$$

Consideremos un computador hipotético de 7 bits en el formato IEEE 754 con 3 bits para la mantisa. Halle cuantos números reales tiene el conjunto $\mathbb{F}$.

Respuesta:

1.d1d2d3*2^E ; -2<=E<=3

=2*(2*2*2*6)+1

=97

3. **(1P)** Sea el sistema: $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$, cual es correcto con respecto al pivoteo completo? Fundamente su respuesta.

a) $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$

Permutando fila 1 y 2:

$$\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Permutando columna 1 y 2:

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Rpta. b)

4. **(1P)** Complete los términos que faltan de la factorización de Crout y diga para que valor o valores de a , la factorización de Crout no es posible.

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 10 \\ 4 & a & -1 \\ 2 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 4 & a-2 & 0 \\ 2 & \boxed{B} & \boxed{C} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & \boxed{D} \\ 0 & 0 & \boxed{E} \end{pmatrix}$$

B	C	D	E
-2	$\frac{2(a+4)}{2-a}$	$\frac{6}{2-a}$	1

No es posible la factorización cuando $a = -4$ (Se considera a=2 sin pivoteo)

5. **(1P)** El método de la Potencia convergerá para la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

¿Verdadero o Falso? Justifique su respuesta.

Respuesta:

Falso. La matriz no tienes valores propios estrictamente dominante

6. **(1P)** Sea la siguiente matriz: $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$. ¿Es posible diagonalizar la matriz A? Justifique su respuesta.

No es posible diagonalizar debido a que $\varepsilon(A) = \{-3\ .-3\}$ presenta m.a=2, al resolver la ecuación $\begin{pmatrix} -(4-3) & 1 \\ -1 & -(2-3) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ➔$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ solo obtenemos un solo vector propio. No es posible la diagonalización. Q=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, por lo que no es invertible para obtener $D = Q^{-1}AQ$.

.

7. **(1P)** Complete la siguiente función que dibuja los discos de Gershgorin

```
function []=gershgorin(A)
[m,n]=size(A);
grid on;
for k=1:n
   r=% Complete Aquí.
function []=gershgorin(A)
```

```
[m,n]=size(A);
grid on;
for k=1:n
      r=sum(abs(A(j,:)))-abs(A(j,j));
   %(h,k) coordenadas del centro de la circunferencia
      h=abs(A(j,j));
       k=0;
   theta=[0:0.1:2*pi];
   xx=r*cos(theta)+h;
   yy=r*sin(theta)+k;
   plot(xx,yy);
   hold on;
end
hold off
end
```

8. **(1P)** Sea el siguiente código MATLAB incompleto para el método de aproximaciones sucesivas:

   x0=2
   for i=1:5
   x1=------------------
   err=abs(x1-x0)
   x0=x1
   end
   ¿Cuál de las siguientes funciones permite la convergencia a la raíz real de la ecuación x^3-x-8=0?
   Fundamente su respuesta
   8/(x0^2-x0)-1
   8/(x0^2+x0)+1
   sqrt(1+8/x0)
   Ninguna

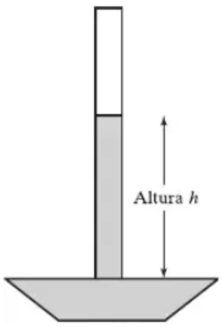
Respuesta c

a) /G1'(2)/=6
b) /G2'(2)/=1.11
c) /G3'(2)/=0.48<1

PARTE II

Problema 1

Un barómetro se usa para medir la presión atmosférica y se llena con un fluido de alta densidad. En el pasado se usaba mercurio, pero desde entonces se sustituyó con una diversidad de otros fluidos debido a las propiedades tóxicas. La presión p medida por un barómetro es la altura de la columna del fluido, h, por la densidad del líquido, ρ, por la aceleración debida a la gravedad, g.



$$p = h\rho g$$

Encuentra la altura h a la que la columna de líquido se elevará para la presión $\ldots\ p = 100000 \pm 5\%.$ Pa

Suponga:

- Primero, que usa mercurio con una densidad de $\rho = 13500 \pm 1\%.\ \frac{kg}{m^3}.$
- Segundo que usa agua con una densidad de $\rho = 1000 \pm 2\%.\ \frac{kg}{m^3}.$

La aceleración de la gravedad es $9.81\frac{m}{s^2}$. Estime:

a) **(1.0P)** La altura estimada para la altura h en el caso 1 y el caso 2.
La altura estimada para la altura h en el caso 1 y el caso 2

$h_i = \frac{p}{g\rho_i}, \qquad i = 1,2$

$\rho_1 = 13500 \pm 1\%.$ $\qquad \rho_2 = 1000 \pm 2\%$

Para el caso 1: $h_1 = 0.7551$ $\qquad$ Para el caso 2: $h_2 = 10.1937$

b) **(2.0P)** La cota de error relativo esperado en el cálculo de la altura h para el caso 1 y 2.
La cota de error relativo esperado en el cálculo de la altura h para el caso 1 y 2.

$h = h(p,\rho)$

$\frac{\varepsilon_h}{|h|} \leq \left|\frac{1}{g\rho}\right|\frac{\varepsilon_p}{\left|\frac{p}{g\rho}\right|} + \left|\frac{-1}{g\rho^2}\right|\frac{\varepsilon_\rho}{\left|\frac{p}{g\rho}\right|} \qquad \delta_h \leq \frac{\varepsilon_p}{|p|} + \frac{\varepsilon_\rho}{|\rho|}$

$\delta_{h_1} \leq \delta_p + \delta_{\rho_1} \qquad \delta_{h_1} = 0.05 + 0.01 = 0.06$
$\delta_{h_2} \leq \delta_p + \delta_{\rho_2} \qquad \delta_{h_2} = 0.05 + 0.02 = 0.07$

c) (**1.0P**) El intervalo probable donde se encontrará el valor exacto de h para cada caso.
Caso 1:$h \in [0.751 \pm 0.0453]$

Caso 2: $h \in [10.1937 \pm 0.7136]$

Problema 2

Sea la viga de longitud L= 1m., doblemente apoyada en los extremos con una carga distribuida w=1000 N/m, donde la curva elástica y(x) se puede obtener resolviendo la siguiente ecuación diferencial: y" = M(x) / EI, con condiciones de frontera: y (0) =0 e y(L)=0.

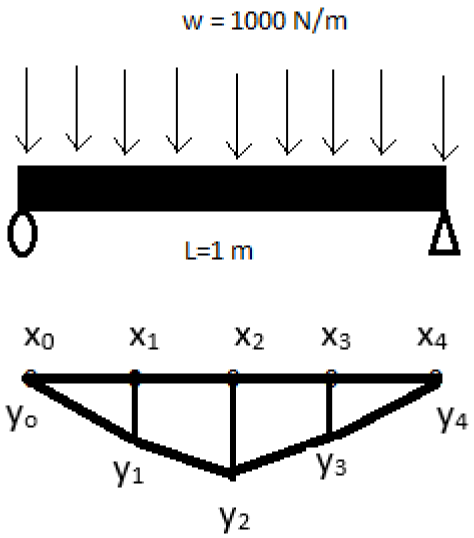
Para lo cual se puede aplicar el método de diferencias finitas, que consiste en aproximar la derivada $y''_i=(y_{i+1}-2y_i+y_{i-1})/h^2$. Discretizamos la viga en 4 segmentos de longitud h=0.25 m, $x_0=0$, $x_{i+1}=x_i+h$.

Si $EI=10^4$ N-m^2 y el momento flector es $M(x)=wLx/2-wx^2/2$

a) **(1.0 P)** Plantear el sistema de ecuaciones lineales:

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = h^2\frac{M(x_i)}{EI}$$

para i=1, 2 y 3.



$$y_2 - 2y_1 + y_0 = h^2\frac{M(x_1)}{EI}$$

$$y_3 - 2y_2 + y_1 = h^2\frac{M(x_2)}{EI}$$

$$y_4 - 2y_3 + y_2 = h^2\frac{M(x_3)}{EI}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \frac{0.25^2}{10^4}\begin{bmatrix} 93.75 \\ 125 \\ 93.75 \end{bmatrix}$$

b) **(1.0 P)** Obtener la factorización LU de Crout

c) Factorizacion de Crout:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d) **(1.0 P)** Resolver los 2 sistemas triangulares para obtener las deflexiones verticales y_1, y_2 e y_3.

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \frac{0.25^2}{10^4} \begin{bmatrix} 93.75 \\ 125 \\ 93.75 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = 10^{-3} \begin{bmatrix} -0.2930 \\ -0.7161 \\ -0.9766 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = 10^{-3} \begin{bmatrix} -0.2930 \\ -0.7161 \\ -0.9766 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0009765625 \\ -0.0013671875 \\ -0.0009765625 \end{bmatrix}$$

e) **(1.0 P)** Determine es la máxima deflexión y determine su error relativo porcentual si el valor real es -0.001302083333333.

ymax_real=-0.001302083333333

ymax_aprox=-0.0013671875

Error_relativo= 5 %

Solución Problema 3

Un rectificador de media onda de un diodo alimenta una carga inductiva-resistiva $f = 1 * 10^3 Hz$, $L = 100 * 10^{-3} H$ y $R = 1 * 10^3 \Omega$. Encuentre el ángulo $x = \beta$, para el cuál la corriente en el diodo se anula. Considere el siguiente modelo matemático:

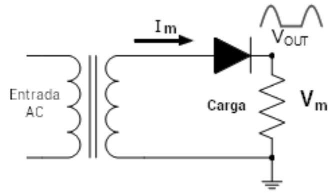


Fig. a Rectificador de media onda.

$$I_m = \sin(\beta - \phi) + \sin(\phi) e^{\left(-\frac{\beta}{\tan(\phi)}\right)}$$

donde: $\tan(\phi) = 2\pi f . L/R$

a) **(1P)** Localice la raíz o raíces de la ecuación con intervalos de longitud 1. Seleccione el(los) intervalos que asegure la existencia de al menos una raíz según el **Teorema de Bolzano**.

b)

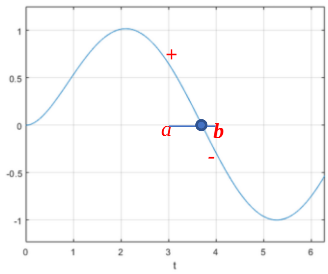
i. [0;1] f(0)=0 ∧ f(1)=+ La función tendría un cero no es nuestro objetivo.

ii. [2;3] f(2)=+ ∧ f(3)=+ No cumple Boltzano.

iii. [3;4] f(3)=+ ∧ f(4)=- Cumple Boltzano, al menos un cero.

c) **(1P)** A partir del intervalo inicial obtenido en (a) aplique el método de la bisección para aproximar la raíz realizando 02 iteraciones e indique el error en cada iteración.

it	a	x	b	f(a)	f(x)	error
0	3	3.5	4	+	+	1/2
1	3.5	3.75	4	+	-	1/4
2	3.5	3.625	3.75	-	+	1/8



d) **(2P)** A partir de la $f(x) = 0$, forme el algoritmo del punto fijo:
$x = x + A * f(x) = g(x)$¿Cuál de los valores escogería: A=1 ó A=1/2? Justifique usando el criterio de convergencia en el contexto cerrado [a b] elegido en a) y luego realice tres iteraciones, elija x_0 igual a la última iteración obtenida en b). El propósito de este problema es alcanzar la mejor precisión en no más de 4 (9 a 10 cifras significativas).

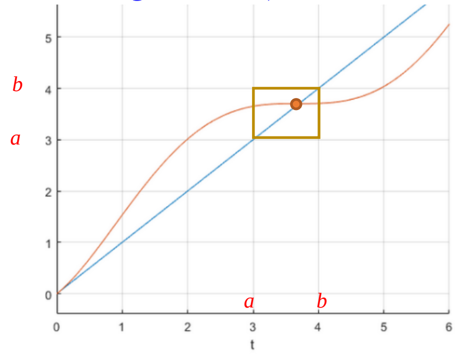
$$\frac{dg}{dt} = \cos\left(t - 0.561\right) - 0.847\, e^{-\frac{5t}{\pi}} + 1$$

$$\frac{dg}{dt} = \cos\left(t - 0.561\right) - 0.847\, e^{-\frac{5t}{\pi}} + 1$$

$$\left|\frac{dg(a)}{dt}\right| = 0.0172 < 1$$

L

$$\left|\frac{dg(b)}{dt}\right| = 0.0010 < 1$$



$$x_{n+1} = x_n + \sin(x_n - 0.56) + 0.53e^{-\frac{5x_n}{\pi}}$$

```
x0 = 3.6250
x1 = 3.7042
x2 = 3.7040
x3 = 3.7040
x4 = 3.7040
ans = -1.7408e-10
ans = 3.70403927368087
Exacto = 3.70403927303759
```

9 cifras significativas.

Respuesta: $\beta = 212.22°$