EXAMEN SUSTITUTORIO DE METODOS NUMERICOS (MB536)

PARTE I

- **DURACION:40 MINUTOS**
  - **Inicio: 10:30 am**
  - **Final: 11:10 am**

  Se adicionará 20 minutos para subir su archivo en pdf.
- **NO SE ACEPTARÁ POR NINGÚN MOTIVO EL ENVIÓ DEL EXAMEN POR OTROS MEDIOS DIFERENTES AL AULA VIRTUAL.**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**
- **P: PENULTIMO DIGITO NO NULO DE SU CODIGO**
- **U: ULTIMO DIGITO NO NULO DE SU CODIGO**

CODIGO	APELLIDOS	NOMBRES	P	U

Responda a las siguientes preguntas

1) **(1 P)** Considere el siguiente modelo basado en la máquina **IEEE-754** que consta de una secuencia de 9 **bits** de longitud de palabra. (**4 bits** el exponente y **4 bits** la mantisa).

a) **(0.5P)** Se pide determine la **notación de máquina** en punto flotante del número $a\pi$, con $a = P + U$.
(Si el caso lo amerita, considere redondeo en la Mantisa)

Solución: $\boldsymbol{P = 1};\ \boldsymbol{U = 1};\ \boldsymbol{a = 2};$

$$+2 * 3.14159 \ldots = +\,(1.1001..) * 2^{(9-7)}$$

0	1	0	0	1	1	0	0	1

No es necesario el redondeo.

$$Aprox = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}\right) * 2^2 = 6.25$$

b) **(0.5P)** Calcule el error de redondeo cometido en base decimal y luego exprese el número con los dígitos significativos exactos que reporta está máquina.

Solución:

$error = (2\pi - 6.25) = 0.33 * 10^{-1}$, 2 cifras significativas: **6.2**

2) (1 P) Sea la siguiente función

$$f(x) = x\left(e^{-x} + 0.5 + \frac{P}{100} + \frac{U}{1000}\right) - (0.5 + \frac{P}{100} + \frac{U}{1000})e^{-x} - x^2$$

Se podría afirmar que en el intervalo [0, 1]:

a) No existe raíz.
b) Existe una raíz.
c) Existe más de una raíz.

Justifique su respuesta:

Solución

Factorizando:

$$f(x) = (e^{-x} - x)(x - (0.5 + \frac{P}{100} + \frac{U}{1000}))$$

Igualando cada factor a 0, existe 2 raíces.

X1=0.5671

P=1

U=1

X2=$0.5 + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000}) = 0.511$

3) **(1 P)** Dado el sistema no lineal de ecuaciones:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + 3xy + 2 \\ x + y^2 + 2y - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Complete el programa en Matlab usando el método de Newton para sistemas, use como punto inicial el vector $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, un máximo número de iteraciones de 50 y $tol = 10^{-8}$.

```
syms x y

F=[x^2+3*x*y+2; x+y^2+2*y-3];

JF=jacobian(F,[x,y]);
........................................................................% F'(x,y) en simbólico.

x0=[4;-1];

[xi,it]= NewtonS(F,JF,x0)..............% Llamar a la función Newton Sist.


function [xi,it]=NewtonS(F,JF,x0)

tol=1e-8

syms x y

for i=1:50 ....................      % Maximo numero de itera.

Fx=subs(F,{x,y},{x0(1),x0(2)});      % F(x,y)

JFx= subs(F,{x,y},{x0(1),x0(2)});    % JF(x,y)

dx= -inv(JFx)*Fx;                      % delta de x e y en vector.

if norm(dx,inf)<tol

  break

end

xi=x0+dx; x0=xi;

end

xi=double(xi);

it=i;

end
```

4) (1 P) Sea w_i y t_i $(i = 1,2, \dots, A)$ los pesos y puntos de integración de la cuadratura Gaussiana de A puntos, ¿qué valor tiene $\sum_1^A w_i$?. Considere: $A = 5(P + U)$.

Solución:

$\boldsymbol{P = 1}$; $\boldsymbol{U = 1}$; $\boldsymbol{A = 10}$;

La fórmula de A=10 puntos es exacta para polinomios de grado 0, por f(t)=1, en $\int_{-1}^{1} 1dt = 2 = w_1 + w_2 + \cdots .. + w_A$

5) (1 P) Sea la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{dy}{dx} = axy \qquad y(1) = 1, \quad a > 0$$

Al aplicar Taylor de orden 2, con h=0.1, se obtiene $y(1.1) = 1.36 + \frac{U}{100}$. Determine a, fundamentando su respuesta.

Solución

x0=1

y0=1

y'=axy

y''=ay+a²x²y

y1=y0+hy'0+(h²/2)y''0

U=1

1.36+1/100=1+0.1a+0.005(a+a²)

Resolver ecuación cuadrática

a=-24.0739

a=3.0739>0

6) (**1 P**) Sea la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 4yx^2 = 0 \qquad y(0) = P \qquad \frac{dy}{dx}(0) = U \qquad x \; en \; [0, 1]$$

Para la solución usando *ode45*, completar el código *MATLAB*:

function du=fun1(x, u)

du= [……….; …………………………………………] ;

end

>>[X, U] = ode45('fun1',[………….],[……………..])

P=1 U=2

```
function uu=fun1(x, u)
    uu=  [  u(2) ; 3*x*u(2)-4*u(1)*x^2]
end
>>[X,U] = ode45('fun1',[0 1],[1 2])
```

7) **(1 P)** En el método de cuadratura de Gauss para integración. Determine si la siguiente proposición es verdadera o falsa (V o F):

La integral $\int_0^1 (P+U)x^3dx$ se transforma en $(P+U)\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+z}{2}\right)^3 dz$.

Justifique su respuesta.

Solución:

Haciendo el cambio de variable:

$$x = \frac{(b+a)+(b-a)z}{2}$$

$\int_0^1 (P+U)x^3dx = \frac{P+U}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+z}{2}\right)^3 dz$. Por lo tanto la proposición es falsa.

8) **(1 P)** La función definida a trozos

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = P, & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ S_1(x) = P + (x-1)^2, & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

Determine si la siguiente proposición es verdadera o falsa (V o F):
S(x) un Spline Cúbico.
Justifique su respuesta.

Solución:

S(x) es continua en x=1.

$$S_0\ (1) = S_1\ (1) = P$$

S'(x) es continua en x=1.

$$S_0'(1) = S_1'(1) = 0$$

Pero:

$$S_0''(1) \neq S_1''(1)$$

Por lo tanto, no es un Spline Cúbico.

EXAMEN SUSTITUTORIO DE METODOS NUMERICOS (MB536)

PARTE II

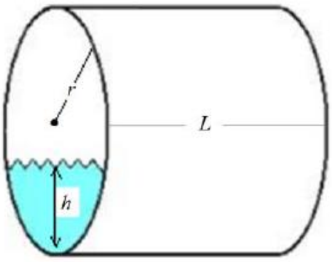
- **DURACION:70 MINUTOS**
    - **Inicio: 11:30 am**
    - **Final: 12:40 am**

  Se adicionará 20 minutos para subir su archivo en pdf.
- **NO SE ACEPTARÁ POR NINGÚN MOTIVO EL ENVIÓ DEL EXAMEN POR OTROS MEDIOS DIFERENTES AL AULA VIRTUAL.**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**
- **P : PENULTIMO DIGITO NO NULO DE SU CODIGO**
- **U : ULTIMO DIGITO NO NULO DE SU CODIGO**

CODIGO	APELLIDOS	NOMBRES	P	U

Problema 1

Considere el volumen de líquido (V) en un tramo de una tubería cilíndrica horizontal de radio r y longitud L.



La relación entre el volumen del líquido y la altura del líquido (h) está dado por:

$$V = L\left[\frac{\pi r^2}{2} - r^2 \sin^{-1}\left(\frac{r-h}{r}\right) - (r-h)\sqrt{2rh-h^2}\right]$$

Donde: $L = 10\ m,\ r = \left(2 + \frac{P}{100} + \frac{U}{50}\right)$ m. Se desea aproximar la altura h, cuando el volumen del líquido alcanza 70 m^3.

a) **(1P)** Localice la raíz o raíces de la ecuación $f(h) = 0$, con intervalos de longitud unitaria. Seleccione el(los) intervalos que asegure la existencia de al menos una raíz según el **Teorema de Bolzano**.

   i. [0;1]
   ii. [1;2]
   iii. [2;3]

b) **(1.5P)** A partir del intervalo inicial obtenido en (a) aplique el método de la bisección para aproximar la raíz realizando 02 iteraciones e indique el error en cada iteración.

c) **(1.5P)** Si consideramos el caso en que la altura del líquido llegó hasta la mitad del cilindro. Aproxime la altura h, cuando el volumen del líquido alcance 30 m^3 , utilizando el algoritmo del Punto Fijo: $h^{(k+1)} = g\left(h^{(k)}\right)$, hasta alcanzar un error máximo de 0.01. Considere $h^{(0)} = 1.5$ m. Además:

$$g(h) = \frac{L\pi h^2 + 60}{2L\pi h}$$

Solución

Dada la función

$$f(h) = L\left[\frac{\pi r^2}{2} - r^2 \sin^{-1}\left(\frac{r-h}{r}\right) - (r-h)\sqrt{2rh - h^2}\right] - 70$$

Donde:

$L = 10\, m,\ r = \left(2 + \frac{P}{100} + \frac{U}{50}\right)$ m.

(a)

$f(2) < 0$

$f(3) > 0$

Existe una solución en el intervalo [2; 3].

(b) Considerando el intervalo inicial [2; 3]

Consideremos por ejemplo P=1, U=1

iter	a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)	error
0	2.0000	3.0000	2.5000	−6.4870	32.5583	13.6411	0.5000
1	2.0000	2.5000	2.2500	−6.4870	13.6411	3.6454	0.2500
2	2.0000	2.2500	2.1250	−6.4870	3.6454	−1.4135	0.1250

$$h \approx 2.1250$$

(c) Si consideramos el caso en que la altura del líquido llegó hasta la mitad del cilindro. $h = r$.
Tenemos el siguiente volumen del líquido V

$$V = \frac{L\pi r^2}{2}$$

La función que aproxime la altura h, cuando el volumen del líquido alcance $30\ \mathrm{m}^3$.

$$f(h) = \frac{L\pi r^2}{2} - 30$$

Utilizando el algoritmo del Punto Fijo: $h^{(k+1)} = g\left(h^{(k)}\right)$, con $h^{(0)} = 1.5\ \mathrm{m}$. Además:

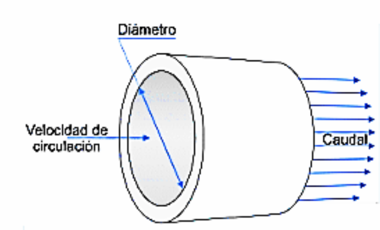
$$g(h) = \frac{L\pi h^2 + 60}{2L\pi h}$$

Partiendo de $h = 1.5$
Iteración 1: $h = 1.3866$ error $= 0.1134$
Iteración 2: $h = 1.3820$ error $= 0.0046$
Por lo tanto la altura h es: 1.3820

Problema 2

La siguiente tabla muestra la velocidad del flujo de agua en una tubería cilíndrica

t , seg.	0	10	20	30	35	40
v, m/seg.	$2+\frac{P}{100}$	1.89	1.72	1.44	1.21	1.01



Se desea hallar la aceleración a(t) en el tiempo de 15 seg. usando derivadas numéricas de alto grado de precisión.

a) **(1P)** Aproxime la derivada numérica DD(h) (central de tres puntos) con h=5 seg. y con h=15 seg.
Solución:
P=1;

$$\boldsymbol{DD(h=15)=\frac{1.44-(2+\frac{1}{100})}{2(15)}=-0.019}$$

$$\boldsymbol{DD(h=5)=\frac{1.72-\ 1.89}{2(5)}=-0.017}$$

b) **(1P)** Extrapole a un grado de aproximación mayor (cuarto orden) usando la fórmula de Richardson:

$$\mathrm{DD(h)}=\frac{3^2\mathrm{DD(h/3)}-\ \mathrm{DD(h)}}{3^2-1}$$

Considere h=15seg.
Solución

$$\boldsymbol{DD(h)=\frac{3^2DD(5)-\ DD(15)}{3^2-1}=-0.0167}$$

c) **(1P)** La velocidad promedio del agua que fluye en la tubería cilíndrica puede ser calculado por la siguiente relación:

$$\bar{v}=\frac{1}{40}\int_0^{40}v(t)dt$$

Calcule una aproximación de la velocidad promedio del caudal de agua, usando Trapecio Compuesto. (Tener en cuenta que no tienen el mismo tamaño de paso).
Solución:

$$\bar{v}=\frac{1}{40}\int_0^{40}v(t)dt=\frac{1}{8}\left((2+\frac{1}{10})+2(1.89+1.72)+1.44\right)$$
$$+\frac{1}{16}(1.44+2*1.21+1.01)=1.6381$$

d) **(1P)** ¿Cuántos dígitos tomaría como significativos en el resultado anterior obtenido? Justifique.
Sugerencia: Usar un método de integración de más alto orden.
Solución:

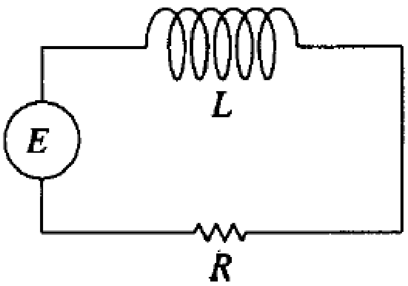
Usando un método de mayor precisión: Simpson 3/8 y 1/3

$$\bar{v} = \frac{1}{40}\int_0^{40} v(t)dt = \frac{3}{32}(2 + 3(1.89) + 3(1.72) + 1.44) + \frac{1}{24}(1.44 + 4 * 1.21 + 1.01) = 1.6425$$

Se tomaría 3 dígitos significativos con redondeo $\bar{v} = 1.64$

Problema 3

Sea el siguiente circuito electrico serie R-L:



Al aplicar la segunda Ley de Kirchoff se obtuvo la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$L\frac{di}{dt} + iR = E$$

Si la batería es de $E = 12 + \frac{P}{10} + \frac{U}{100}$ Voltios, la inductancia de $L = 0.5$ Henrios y la resistencia de $R = 10$ Ohmios, además, la intensidad de corriente inicial es i=0 Amperios, determine:

a) **(2.5 P)** La intensidad de corriente eléctrica en el instante t=0.03 segundos, usando Taylor 2, con h=0.01 segundos.

b) **(1.0 P)** El error relativo en t=0.03 seg. Comparado con la solución analítica.

c) **(0.5 P)** Estime el voltaje en la inductancia en t=0.03 seg. y su error absoluto.

Solución

a) **Taylor 2**

P=1   U=1

0.5i'+10i=12.11

i'=24.22-20i

i''=-20i'=-484.4-400i

t_0=0

i_0=0

h=0.01

$t_{n+1}=t_n+h$

$i_{n+1}=i_n+h*i_n'+h^2/2*i_n''$

$i_{n+1}=i_n+h*(24.22-20*i_n)+h^2/2*(-484.4+400*i_n)$

t	**i**
0	**0**
0.01	**0.2195**
0.02	**0.3992**
0.03	**0.5464**

i(0.03)= 0.5464 Amp

b)

Solución analítica: i =**1.211 - 1.211*exp(-20*t)**

i(0.03)= 0.5433 Amp

Error_relativo=0.5698%

c)

$V_L$aprox=E-Iaprox*R=12.11-0.5464*10=6.6461 Voltios

$V_L$exacto=E-Iexacto*R=12.11-0.5433*10=6.6771 Voltios

Err_abs=0.0310 Voltios