UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA | P.A. 2019-2
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA | 23/12/2019
DACBHCC | 12:00-13:50 h

EXAMEN SUSTITUTORIO DE MÉTODOS NUMÉRICOS PARA INGENIERÍA (MB540)

- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO Y CALCULADORA**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**
- **PROHIBIDO EL USO DE CELULARES U OTROS EQUIPOS DE COMUNICACION ELECTRONICA**
- **DURACION: 110 MINUTOS**

Docentes: Castro Robert –Garrido Rosa-Pantoja Hermes

Problema 1

Dado un circuito eléctrico mostrado en la Figura 1.

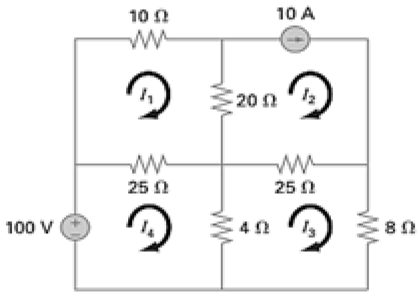


Figura1 Circuito eléctrico
Cortesía: Libro Chapra (5ta Ed.)

a) **(1P)** Demuestre el modelo del circuito eléctrico, dado por las siguientes ecuaciones.

$$55I_1 - 25I_4 = 200$$
$$37I_3 - 4I_4 = 250$$
$$-25I_1 - 4I_3 + 29I_4 = 100$$

Considere la ley de mallas de corrientes.

a) **(1.5P)** Demuestre la convergencia del método de Gauss-Seidel usando el radio espectral (máximo valor propio de la matriz iterativa de Gauss-Seidel). Comente su respuesta con respecto a la velocidad de convergencia.

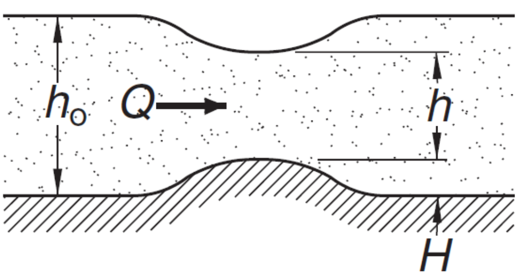
b) **(1.5P)** Realice tres iteraciones con el algoritmo de Gauss-Seidel y analice el error en la tercera iteración, Use como valor inicial el vector c ($k = 0$) . ¿Cuántas cifras significativas exactas tiene su respuesta al final de realizar las tres iteraciones? ($k = 0,1,2$).

Proceso iterativo: $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$

c) **(1P)** **¿**Puede Ud. asegurar que el método Jacobi también converge? No realice iteraciones. Justifique.

Problema 2

La ecuación de Bernoulli para el flujo de fluido en un canal abierto con un pequeño cuello es:



$$\frac{Q^2}{2gb^2h_0^2} - \frac{Q^2}{2gb^2h^2} = h - h_0 + H$$

Donde: $Q = 1{,}2\ m^3/s$ = tasa de flujo volumétrico (Caudal); $g = 9{,}81\ m/s^2$ = gravedad. $b = 1{,}8\ m$ = ancho del canal. $h_0 = 0{,}6\ m$ = Nivel del agua del caudal. $H = 0{,}075m$ = Altura del cuello. h = Nivel del agua por encima del cuello.

Se desea aproximar la altura h, para ello

a) **(2P)** Pruebe que existe un punto fijo y que es único en el intervalo [0,4;1] si tomamos como

$$g(h) = \frac{Q^2}{2gb^2h_0^2} - \frac{Q^2}{2gb^2h^2} + h_0 - H = h$$

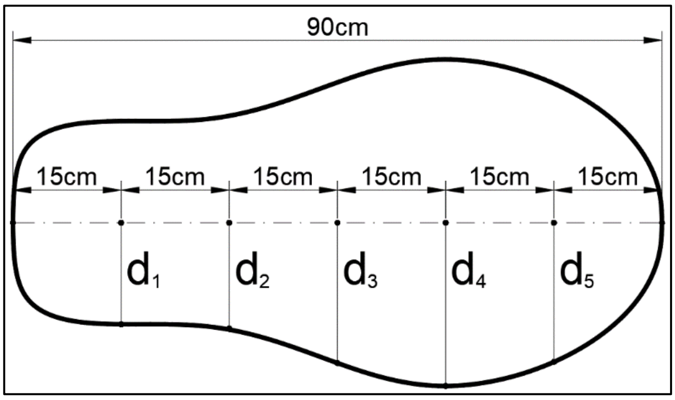
b) **(2P)** Aproxime el valor de h utilizando el método de la bisección hasta que el error sea menor que 0.05 usando como intervalo inicial [0.4;1].

c) **(1P)** Implemente una función en MatLab con la siguiente cabecera **function z=biseccion(f,a,b,Tol)**, que resuelva b)

Problema 3

Estimar el área de la sección de un ducto subterráneo que transporta aire del medio ambiente al interior de una mina, dicha sección es simétrica respecto a su eje horizontal de 90cm de longitud, se tiene como dato el registro de 5 medidas verticales espaciados cada 15cm, tal como se obser va en la figura :

	Medidas en cm
d_1	13
d_2	14
d_3	16
d_4	18
d_5	15



a) **(2.0P)** Tomando toda la información brindada, estime el área en m^2 usando la fórmula compuesta del método del trapecio.

b) **(1.5P)** Estime la misma área en m^2 usando la fórmula compuesta del método de Simpson de 3/8.

c) **(0.5P)** Si el área exacta es 0.241356 m^2, comente sobre los resultados obtenidos en el ítem a y b.

d) **(1.0P)** Desarrolle una rutina en Matlab que permite estimar el área en m^2, usando la formula compuesta de Simpson 1/3

Problema 4

Un elemento de masa "***m***" se mueve en línea recta a lo largo del eje "***x***" sometida a una fuerza elástica ***–kx*** y a una fuerza de rozamiento viscosa de la forma $-2\beta\dot{x}$. Al aplicar la segunda Ley de Newton se obtiene que la ecuación del movimiento viene dada por: $m\,\ddot{x} + k\,x + 2\beta\,\dot{x} = 0$:

a) **(0.5 P)** Si β=6, k=4 y m=9, y en el instante inicial la masa está en x=2 m y su velocidad es 1 m/s. Plantear el sistema EDO de primer orden.

b) **(2.0 P)** Determine la posición y velocidad del elemento al cabo de 0.7 segundo usando Euler con h=0.1.

c) **(1.0 P)** Halle el error en b) si la solución analítica tiene la forma $x=e^{-2t/3}*(c_1t+c_2)$

d) **(0.5 P)** De los resultados de Euler estime el máximo desplazamiento de la masa y en que instante de tiempo sucede y determine su error.

e) **(1.0 P)** Escriba el código script para b), c) y d)

.

Los Profesores

SOLUCIONARIO

Problema 1

Solución

a) Malla1: $(10 + 20 + 25)I_1 - 25I_4 - 20I_2 = 0$ ➔ $55I_1 - 25I_4 = 200$
Malla 2: $I_2 = 10$
Malla 3: $-25I_2 + (25 + 8 + 4)I_3 - 4I_4 = 0$ ➔ $37I_3 - 4I_4 = 250$
Malla 4: $-25I_1 - 4I_3 + (25 + 4)I_4 - 100 = 0$ ➔ $-25I_1 - 4I_3 + 29I_4 = 100$

b) Algoritmo de Gauss- Seidel

$$x^{(k+1)} = \underbrace{(D-L)^{-1}U}_{T_{gs}}\, x^{(k)} + \underbrace{(D-L)^{-1}b}_{C_{gs}}$$

$$D = \begin{bmatrix} 55 & 0 & 0 \\ 0 & 37 & 0 \\ 0 & 0 & 29 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 25 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_{gs} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.4545 \\ 0 & 0 & 0.1081 \\ 0 & 0 & 0.4068 \end{bmatrix} \qquad \rho(T_{gs}) = 0.4068 < 1 \ \therefore \text{converge.}$$

Con respecto a la velocidad de convergencia $\rho(T_{gs}) < 0.5$, por lo que es rápido.

c) $$x^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.4545 \\ 0 & 0 & 0.1081 \\ 0 & 0 & 0.4068 \end{bmatrix} x^{(k)} + \begin{bmatrix} 3.6364 \\ 6.7568 \\ 7.5150 \end{bmatrix}. \qquad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 3.6364 \\ 6.7568 \\ 7.5150 \end{bmatrix}$$

Iteraciones

	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
	3.6364	7.0523	8.4418	9.0069
	6.7568	7.5692	7.8997	8.0341
	7.5150	10.5719	11.8153	12.3210
Error $\delta_{\|\cdot\|_\infty}$:	3.4159	1.8936	0.0478	0.0187

2 c.s.e. { 9.0 8.0 12} $x^{(4)}$= {9.2368 8.0888 12.5268}

d) El radio espectral $\rho(T_J)$=0.6378 < 1, por que el Método de Jacobi también es convergente.

Problema 2

Solución

a)

$$g(h) = 0.5879 - 0.02265 \times \frac{1}{h^2}$$
$$g'(h) = 0.04531 \times \frac{1}{h^3}$$

Se observa que $g'(h) > 0$ en el intervalo [0,4;1], por lo tanto, la función $g(h)$ es creciente en [0,4;1].
Evaluando $[0.4463; 0.5653] = [\mathrm{g}(0.4), \mathrm{g}(1)] \subset [0.4,1]$, asegura la existencia del punto fijo.

Además, $g'(h)$ es decreciente, luego $g'(0.4) = 0{,}7079 < 1$, asegura la unicidad del punto fijo.

b)

i	a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)	error
0	0.4	1	0.7	+	-	-	0.3
1	0.4	0.7	0.55	+	-	-	0.15
2	0.4	0.55	0.475	+	-	+	0.075
3	0.475	0.55	0.5125				0.0375

c)

```
function z=biseccion(f,a,b,Tol)
c=(a+b)/2;
error=(b-a)/2;
z=[a b c f(a) f(b) f(c) error]

while error>Tol
   if   f(a)*f(c)<0
      b=c;
   else
      a=c;
   end
   c=(a+b)/2;
   error= (b-a)/2;
   z=[z;a b c f(a) f(b) f(c) error];

end
```

Problema 3

Solución

Parte a)

Considerando los 90cm, se toma los 7 puntos, donde la altura en los extremos es 0.

A= (y0+2y1+2y2+2y3+2y4+2y5+y6) h/2= (0+2(13)+2(14)+2(16)+2(18)+2(15)+0)*15/2=1140

Pero como es simétrico y se desea en m^2

At=2*A*10^-4=0.2280

Parte b)

Igualmente considerando los 90cm, se toma los 7 puntos, donde la altura en los extremos es 0.

A= (y0+3y1+3y2+2y3+3y4+3y5+y6) 3h/8= (0+3(13)+3(14)+2(16)+3(18)+3(15)+0)*3*15/8=1192.5

Pero como es simétrico y se desea en m^2

As=2*A*10^-4=0.2385

Parte c)

Los errores en cada ítem son:0.01336 y 0.00286, por lo tanto con el método de Simpson de 3/8 se tiene una mejor estimación del área.

Parte d)

```
clc;clear;
x=linspace(0,90,7);
h=15;
y=[0 13 14 16 18 15 0];
%Metodo del simpson 1/3
coef=y*0+1;
coef(2:2:end-1)=4;
coef(3:2:end-1)=2
I=(h/3)*(coef*y')
fprintf('El area es %.5f\n',2*I*1e-4);
```

Problema 4

Solución

a)

$$\dot{x} = v \quad x(0) = 2$$
$$\dot{v} = \frac{-4x-12v}{9} \quad v(0) = 1$$

b)

h=0.1

$t_{i+1}=t_i+h$

$x_{i+1}=x_i+h*v_i$

$v_{i+1}=v_i+h*(-4x_i-12v_i)/9$

t	x	v
0.0000	2.0000	1.0000
0.1000	2.1000	0.7778
0.2000	2.1778	0.5807
0.3000	2.2359	0.4065
0.4000	2.2765	0.2529
0.5000	2.3018	0.1180
0.6000	2.3136	0.0000
0.7000	2.3136	-0.1028

c)

solución analítica

x(t)=exp(-(2*t)/3)*(2+7*t/3)

v(t)=exp(-(2*t)/3)*(1-14*t/9)

x(0.7)=2.2784 (Error=0.0352)

v(0.7)=-0.0557 (Error=0.0471)

d)

xmax=2.3136 cuando v=0 y t=0.6

Valores exactos:

v'(t)=0 t=9/14 Err=0.0429

xmax=x(9/14)=2.28 Err=0.0336

e)

```
% p4.m
clc
clear all
x=dsolve('9*D2x+4*x+12*Dx=0','x(0)=2','Dx(0)=1','t')
n=7,h=0.7/n
tt=0:h:0.7
xx=double(subs(x,tt))
vv=double(subs(diff(x),tt))
disp([tt' xx' vv'])
% Euler
te(1)=0,xe(1)=2,ve(1)=1
for i=1:n
   te(i+1)=te(i)+h;
   xe(i+1)=xe(i)+h*ve(i);
   ve(i+1)=ve(i)+h*-1/9*(4*xe(i)+12*ve(i));
end
disp([te' xe' ve'])
plot(tt,xx,tt,vv,te,xe,te,ve), grid, legend('x(t)','v(t)','xE(t)','vE(t)')
errx=abs(xe(8)-xx(8))
errv=abs(ve(8)-vv(8))
xmax=double(subs(x,9/14))
```