UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA — P.A. 2019-2
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA — 13/12/2019
DACBHCC — 12:00-13:50 h

EXAMEN FINAL DE METODOS NUMERICOS PARA INGENIERIA (MB540)

- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO Y CALCULADORA**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**
- **PROHIBIDO EL USO DE CELULARES U OTROS EQUIPOS DE COMUNICACION ELECTRONICA**
- **DURACION: 110 MINUTOS**

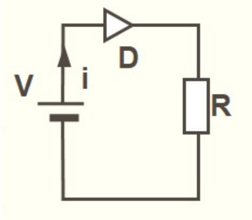
Docentes: Castro Robert –Garrido Rosa-Pantoja Hermes

Problema 1

La corriente i de un diodo semiconductor varía con la tensión V según el modelo

$$i = I_s(e^{\lambda V} - 1) \qquad (1)$$

Donde I_s (amperios) se denomina contracorriente de saturación, y $\lambda[volts^{-1}]$ es un valor característico del diodo. A continuación, se presenta los datos obtenidos al probar el diodo.



V	0,03	0,06	0,09	0,12
i	0,041	0,133	0,342	0,819

a) **(0.5P)** Usando solo los datos en V=0.03 y V=0.12, justifique el siguiente sistema de ecuaciones no lineales expresado en la forma:

$$F(I_s;\lambda) = \begin{bmatrix} I_s\left(e^{0.03\lambda} - 1\right) - 0.041 \\ I_s\left(e^{0.12\lambda} - 1\right) - 0.819 \end{bmatrix} = 0$$

b) **(1.0P)** Determine el algoritmo de Newton Raphson para sistemas aplicado a este problema.

c) **(2P)** Realice 02 iteraciones usando Newton Raphson empezando con el punto inicial $I_s^{(0)} = 0.1;\ \lambda^{(0)} = 30$ y determine el error cometido en cada iteración.

d) **(1.5)** Complete el siguiente script

```
[x,y]=meshgrid(0:.1:30);
z1=________________
z2=________________
figure,
subplot(2,2,1),mesh(x,y,z1),
title('z1=f(x,y)')
hold on,
contour(x,y,z1,[0
0],'r','linewidth',2);
subplot(2,2,2),mesh(x,y,z2),
title('z2=g(x,y)')
hold on
contour(x,y,z2,[0 0],'g');
subplot(2,2,3),
contour(x,y,z1,[0 0],'r');
hold on,
______________________
xlabel('x'),
ylabel('y')
%legend('z1=0','z2=0',2);
title('Intersección')
```

Problema 2

Tomando como referencia el **Problema 1**.

$$i = I_s(e^{\lambda V} - 1) \qquad (1)$$

Tabla 1 Datos del Laboratorio

V	0.03	0.06	0.09	0.12
i	0.041	0.133	0.342	0.819

a) **(1.5P)** Usando los datos interpole usando un polinomio de Newton de grado 2, si se desea interpolar $i(0.05)$.

¿Cuántas cifras decimales exactas tiene esta aproximación? Justifique.

b) Use el dato de la aproximación de *Is* que encontró en el problema 1 item c), si no realizó el problema (1), asuma *Is*≈ 0.031, adecuando la ecuación (1) a una regresión lineal. Para lo cual debe hacer lo siguiente:

b.1) **(0.5P)** Determine la función de regresión de la forma: $\bar{y} = c_1 V + c_2$

b.2) **(2P)** Realice el planteamiento de las ecuaciones y calcule los parámetros I_s y λ, mediante un análisis por mínimos cuadrados de todo el conjunto de datos dados en la Tabla 1. Comente si I_s es aproximado al valor supuesto o calculado en el ítem c) del Problema 1.

c) **(1P)** Aproxime *i*(0.05) usando el modelo obtenido en b.2)¿Es un buen ajuste de regresión? Justifique.

Problema 3

Un eje circular de un diámetro *d* (m) que varía con la posición axial x (m) según:

$$d = 0.02\frac{(1+x^2)}{e^x} \qquad 0 \leq x \leq 3$$

Una carga axial P de 30000 N se aplica en un extremo del eje, cuyo módulo de elasticidad E es $2x10^{11}$ N/m^2. La elongación axial del eje es Δx (m) y está dado por:

$$\Delta x = \frac{P}{E}\int \frac{1}{A}dx; \qquad A = \frac{\pi d^2}{4}$$

Siendo A (m^2) el área de la sección transversal.

a) **(1.5P)** Aproxime Δx aplicando la fórmula de Simpson 1/3 con 10 particiones.
b) **(1.5P)** Aproxime Δx mediante la Cuadratura de Gauss (N=3).
c) **(0.5P)** Si la Δx exacta es 0.003095486896586, determine los errores y comente sus resultados.
d) **(1.5)** Escriba un script en MATLAB para resolver a, b y c.

Problema 4

Una barra de plomo es calentada hasta 300°C y se sabe que la rapidez con que se enfría es proporcional a la diferencia entre su temperatura instantánea y la del medio que le rodea. Considerar la temperatura ambiente 14 °C.

a) **(1.0P)** Plantee la ecuación diferencial.
b) **(1.5P)** Estime la constante de proporcionalidad de enfriamiento, si al cabo de 10 segundos se reduce su temperatura en 20°C, usando el método de Euler con una iteración.
c) **(1.5P)** Con la constante de proporcionalidad hallada en el ítem a) y usando como nuevo punto de partida la temperatura de 280°C, estime a cuanto se reduce la temperatura luego de 50 segundos usando el método de Runge Kutta de orden 4 en una iteración (o paso).
d) **(1.0P)** Desarrolle un script, que permita estimar cuanto tiempo se demora para enfriarse desde 300 °C hasta 15°C con un paso de 10^{-3} usando el método de Euler.

Los Profesores

SOLUCIONARIO

Problema 1

Solución:

a)

$$F(I_s;\lambda)=\begin{bmatrix} I_s\left(e^{0.03\lambda}-1\right)-0.041 \\ I_s\left(e^{0.12\lambda}-1\right)-0.819 \end{bmatrix}=0$$

b)

$$\begin{bmatrix} I_s^{(k+1)} \\ \lambda^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_s^{(k)} \\ \lambda^{(k)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \left(e^{0.03\lambda^{(k)}}-1\right) & I_s^{(k)}\left(0.03\times e^{0.03\lambda^{(k)}}\right) \\ \left(e^{0.12\lambda^{(k)}}-1\right) & I_s^{(k)}\left(0.12\times e^{0.12\lambda^{(k)}}\right) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_s^{(k)}\left(e^{0.03\lambda^{(k)}}-1\right)-0.041 \\ I_s^{(k)}\left(e^{0.12\lambda^{(k)}}-1\right)-0.819 \end{bmatrix}$$

$=$

c) Iteración 01

$$\begin{bmatrix} I_s^{(1)} \\ \lambda^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 30 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.1607611 & -0.0195024 \\ -94.087066 & 3.8577692 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1049603 \\ 3.4398234 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0316188 \\ 29.301943 \end{bmatrix}$$

Iteración 02

$$\begin{bmatrix} I_s^{(2)} \\ \lambda^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0452509 \\ 26.605363 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.2130569 & -0.0217025 \\ -310.21034 & 13.380478 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0035391 \\ 0.2135865 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0319609 \\ 27.541931 \end{bmatrix}$$

d)

```
[x,y]=meshgrid(0:.1:30);
z1=x*(exp(0.03*y)-1)-0.041;
z2= x*(exp(0.12*y)-1)-0.819;
figure,
subplot(2,2,1), mesh(x,y,z1), title('z1=f(x,y)')
hold on,
contour(x,y,z1,[0 0],'r','linewidth',2);
subplot(2,2,2), mesh(x,y,z2), title('z2=g(x,y)')
hold on
contour(x,y,z2,[0 0],'g','linewidth',2);
subplot(2,2,3),
contour(x,y,z1,[0 0],'r','linewidth',2);
hold on,
contour(x,y,z2,[0 0],'g','linewidth',2);
xlabel('x'),
ylabel('y')
%legend('z1=0','z2=0',2)
title('Intersección')
```

Problema 2

a) h=0.03

V	i	$\boldsymbol{\Delta i}$	$\boldsymbol{\Delta^2 i}$	$\boldsymbol{\Delta^3 i}$
0.03	0.041	0.0920	0.1170	0.151
0.06	0.133	0.2090	0.2680	
0.09	0.342	0.4770		
0.12	0.819			

$\boldsymbol{s = \frac{V-0.03}{h}}$

$P_2(V) = i + \frac{s}{1}\Delta i + \frac{s(s-1)}{2}\Delta^2 i + \frac{s(s-1)(s-2)}{2}\Delta^3 i$

$s = \frac{0.05-0.03}{h} = \frac{2}{3}$

$P_2(0.05) = 0.0893$ Error≈ $0.075 * 10^{-1} \leq 0.5 * 10^{-k}$ k=1 c.d.e (incluyendo redondeo) i(0.05)≈ 0.1

b) $I_s \approx 0.031$

b.1) Modifique la ecuación (1) $i + I_s \approx I_s e^{\lambda V}$ ➔ $\bar{y} = \ln(i + I_s) = \underbrace{\lambda}_{c_1} V + \underbrace{\ln(I_s)}_{c_2}$

V:	0.03	0.06	0.09	0.12
i:	0.041	0.133	0.342	0.819
$\bar{y}$	-2.6311	-1.8079	-0.9862	-0.1625

Función de regresión: $\bar{y} = c_1 x + c_2$,

b.2) Ecuación Normal:

$$\begin{bmatrix} 0.03 & 0.06 & 0.09 & 0.12 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.03 & 1 \\ 0.06 & 1 \\ 0.09 & 1 \\ 0.12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.03 & 0.06 & 0.09 & 0.12 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.6311 \\ -1.8079 \\ -0.9862 \\ -0.1625 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.027 & 0.3 \\ 0.3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2957 \\ -5.5877 \end{bmatrix}$$

$\bar{y} = 27.4247V - 3.4538$

$\lambda = 27.4247$ y $I_s = e^{-3.4538} = 0.0316$ ➔ $i \approx 0.0316 e^{27.4247V}$

c) $i(0.05) = 0.0930$

$R^2 \rightarrow 1$ Buen modelo.

Problema 3

$$d = 0.02\frac{(1+x^2)}{e^x} \qquad 0 \le x \le 3$$

P=30000 N

E=$2x10^{11}$

$$I = \int_0^3 \frac{4}{\pi\left(0.02\frac{(1+x^2)}{e^x}\right)^2}dx$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi\left(0.02\frac{(1+x^2)}{e^x}\right)^2}$$

a) Aplicando Simpson 1/3:

h=0.3

Is=h/3*(f(0)+4*f(0.3)+ 2*f(0.6)+ 4*f(0.9)+ 2*f(1.2)+ 4*f(1.5)+ 2*f(1.8)+ 4*f(2.1)+ 2*f(2.4)+ 4*f(2.7)+f(3))

Is=2.064075089802862e+04
Δxs=(P/E)*Is=0.003096112634704
Err_s=6.257381178712690e-07

b) Aplicando cuadratura de Gauss

x=(3/2)*(t+1)

dx=3/2*dt

$$F(t) = \frac{3}{2}f\left(\frac{3}{2}(t+1)\right)$$

$$Ig = \frac{5}{9} * F(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + \frac{8}{9} * F(0) + \frac{5}{9} * F(\sqrt{\frac{3}{5}})$$

Ig=2.059526860488303e+04
Δxg=(P/E)*Ig=0.003089290290732
Err_g=6.196605853968536e-06
c)
La fórmula de Simpson1/3 es ligeramente más precisa que la cuadratura de Gauss la cual se puede mejorar tomando mayor cantidad de puntos.
d)

```
clc, clear all, syms x t, format long
P=30000, E=2e11
d=0.02*(1+x^2)/exp(x)
```

```
A=pi*d^2/4
f=1/A
I=double(int(f,0,3))    % 2.063657931057615e+04
dx=P/E*I  % 0.003095486896586
% Simpson 1/3
h=0.3
x=0:h:3
y=double(subs(f,x))
c=[1 4 2 4 2 4 2 4 2 4 1]
Is=h/3*sum(c.*y)  % 2.064075089802862e+04
dxs=P/E*Is  %  0.003096112634704
es=abs(dx-dxs)  % 6.257381178712690e-07
% Cuadratura de Gauss
ff=3/2*subs(f,3/2*(t+1))
c1=5/9, c2=8/9, c3=5/9
x1=-sqrt(3/5), x2=0, x3=sqrt(3/5)
Ig=double(c1*subs(ff,x1)+c2*subs(ff,x2)+c3*subs(ff,x3)) %
2.059526860488303e+04
dxg=P/E*Ig  % 0.003089290290732
eg=abs(dx-dxg)  % 6.196605853968536e-06
```

Problema 4
Parte a)

$$T' = K(T - Tm)$$

$$T' = K(T - 14)$$

T la temperatura instantánea
Tm es la temperatura ambiente
K la constante de proporcionalidad

Parte b)

$x := 0 \quad yi := 300 \quad yf := 280 \quad h := 10 \quad T' = K(T - Tm) \qquad f(x, y) := K(y - 14)$

$y = y + h \cdot f(x, y) \quad 280 = 300 + 10 \cdot K(300 - 14) \quad K := \dfrac{280 - 300}{10 \cdot (300 - 14)} = -0.00699300699$

Parte c)

$x:=0 \qquad y:=280 \qquad h:=50 \qquad f(x,y):=K\cdot(y-14)$

$$k_1:=h\cdot f(x,y)=-93.00699300699$$

$$k_2:=h\cdot f\left(x+\frac{h}{2},y+\frac{k_1}{2}\right)=-76.74702919458$$

$$k_3:=h\cdot f\left(x+\frac{h}{2},y+\frac{k_2}{2}\right)=-79.58968021074$$

$$k_4:=h\cdot f(x+h,y+k_3)=-65.17843349275$$

$$y:=y+\frac{k_1+2\ k_2+2\ k_3+k_4}{6}=201.5235257816$$

Se ha reducido 78.47647 °C

Parte d)

```
clc;clear;
x0=0;y0=300;h=1e-3;
f=inline('0.00699300699*(14-y)');
x=x0; X=x0;
y=y0; Y=y0;
while y>15
    x=x+h;
    y=y+h*f(y);
end
fprintf('El tiempo transcurrido es ');
fprintf('%.2f segundos', x);
```