

**EXAMEN SUSTITUTORIO DE
 MÉTODOS NUMÉRICOS (MB536)**

- SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO Y CALCULADORA
- ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS
- PROHIBIDO EL USO DE CELULARES U OTROS EQUIPOS DE COMUNICACION ELECTRONICA
- DURACION: 110 MINUTOS

Docentes: Castro Robert – Obregón Máximo

Problema 1

Dado un circuito eléctrico mostrado en la Figura 1.

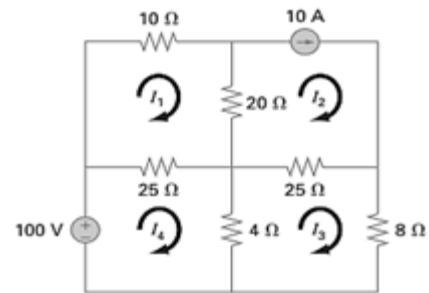


Figura1 Circuito eléctrico
 Cortesía: Libro Chapra (5ta Ed.)

- a) (1P) Demuestre el modelo del circuito eléctrico, dado por las siguientes ecuaciones.

$$55I_1 - 25I_4 = 200$$

$$37I_3 - 4I_4 = 250$$

$$-25I_1 - 4I_3 + 29I_4 = 100$$

Considere la ley de mallas de corrientes.

- a) (1.5P) Demuestre la convergencia del método de Gauss-Seidel usando el radio espectral (máximo valor propio de la matriz iterativa de Gauss-Seidel). Comente su respuesta con respecto a la velocidad de convergencia.
- b) (1.5P) Realice tres iteraciones con el algoritmo de Gauss-Seidel y analice el error en la tercera iteración, Use como valor inicial el vector c ($k = 0$). ¿Cuántas cifras significativas exactas tiene su respuesta al final de realizar las tres iteraciones? ($k = 0,1,2$).

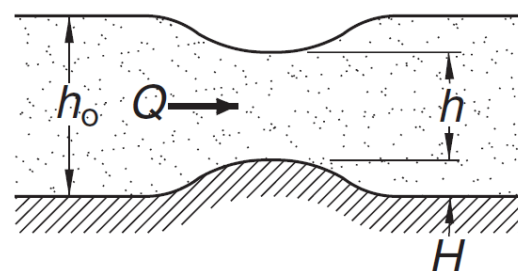
Proceso iterativo: $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$

- c) (1P) ¿Puede Ud. asegurar que el método Jacobi también converge? No realice iteraciones. Justifique.

Problema 2

La ecuación de Bernoulli para el flujo de fluido en un canal abierto con un pequeño cuello es:

$$\frac{Q^2}{2gb^2h_0^2} - \frac{Q^2}{2gb^2h^2} = h - h_0 + H$$



Donde: $Q = 1,2 \text{ m}^3/\text{s}$ = tasa de flujo volumétrico (Caudal); $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ = gravedad.
 $b = 1,8 \text{ m}$ = ancho del canal. $h_0 = 0,6 \text{ m}$ = Nivel del agua del caudal. $H = 0,075 \text{ m}$ = Altura del cuello. h = Nivel del agua por encima del cuello.

Se desea aproximar la altura h , para ello

- a) (2P) Pruebe que existe un punto fijo y que es único en el intervalo $[0,4;1]$ si tomamos como

$$g(h) = \frac{Q^2}{2gb^2h_0^2} - \frac{Q^2}{2gb^2h^2} + h_0 - H = h$$

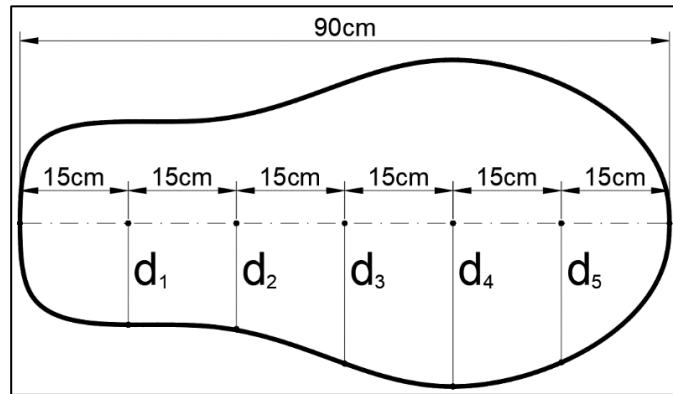
- b) (2P) Aproxime el valor de h utilizando el método de la bisección hasta que el error sea menor que 0.05 usando como intervalo inicial [0.4;1].
- c) (1P) Implemente una función en MatLab con la siguiente cabecera
function z=biseccion(f,a,b,Tol), que resuelva b)

Problema 3

Estimar el área de la sección de un ducto subterráneo que transporta aire del medio ambiente al interior de una mina, dicha sección es simétrica respecto a su eje horizontal de 90cm de longitud, se tiene como dato el registro de 5 medidas verticales espaciados cada 15cm, tal como se obser

va en
 la
 figura
 :

	Medidas en cm
d ₁	13
d ₂	14
d ₃	16
d ₄	18
d ₅	15



- a) (2.0P) Tomando toda la información brindada, estime el área en m² usando la fórmula compuesta del método del trapecio.
- b) (1.5P) Estime la misma área en m² usando la fórmula compuesta del método de Simpson de 3/8.
- c) (0.5P) Si el área exacta es 0.241356 m², comente sobre los resultados obtenidos en el ítem a y b.
- d) (1.0P) Desarrolle una rutina en Matlab que permite estimar el área en m², usando la formula compuesta de Simpson 1/3

Problema 4

Un elemento de masa “m” se mueve en línea recta a lo largo del eje “x” sometida a una fuerza elástica $-kx$ y a una fuerza de rozamiento viscosa de la forma $-2\beta\dot{x}$. Al aplicar la segunda Ley de Newton se obtiene que la ecuación del movimiento viene dada por:

$$m \ddot{x} + k x + 2\beta \dot{x} = 0;$$

- a) (0.5 P) Si $\beta=6$, $k=4$ y $m=9$, y en el instante inicial la masa está en $x=2$ m y su velocidad es 1 m/s. Plantear el sistema EDO de primer orden.
- b) (2.0 P) Determine la posición y velocidad del elemento al cabo de 0.7 segundo usando Euler con $h=0.1$.
- c) (1.0 P) Halle el error en b) si la solución analítica tiene la forma $x=e^{-2t/3}*(c_1t+c_2)$
- d) (0.5 P) De los resultados de Euler estime el máximo desplazamiento de la masa y en que instante de tiempo sucede y determine su error.
- e) (1.0 P) Escriba el código script para b), c) y d)

SOLUCIONARIO

Problema 1

Solución

a) Malla 1: $(10 + 20 + 25)I_1 - 25I_4 - 20I_2 = 0 \quad \rightarrow 55I_1 - 25I_4 = 200$
 Malla 2: $I_2 = 10$
 Malla 3: $-25I_2 + (25 + 8 + 4)I_3 - 4I_4 = 0 \quad \rightarrow 37I_3 - 4I_4 = 250$
 Malla 4: $-25I_1 - 4I_3 + (25 + 4)I_4 - 100 = 0 \quad \rightarrow -25I_1 - 4I_3 + 29I_4 = 100$

b) Algoritmo de Gauss- Seidel

$$x^{(k+1)} = \underbrace{(D - L)^{-1}U}_{T_{gs}} x^{(k)} + \underbrace{(D - L)^{-1}b}_{c_{gs}}$$

$$D = \begin{bmatrix} 55 & 0 & 0 \\ 0 & 37 & 0 \\ 0 & 0 & 29 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 25 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_{gs} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.4545 \\ 0 & 0 & 0.1081 \\ 0 & 0 & 0.4068 \end{bmatrix} \quad \rho(T_{gs}) = 0.4068 < 1 \quad \therefore \text{converge.}$$

Con respecto a la velocidad de convergencia $\rho(T_{gs}) < 0.5$, por lo que es rápido.

$$c) \quad x^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.4545 \\ 0 & 0 & 0.1081 \\ 0 & 0 & 0.4068 \end{bmatrix} x^{(k)} + \begin{bmatrix} 3.6364 \\ 6.7568 \\ 7.5150 \end{bmatrix}. \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 3.6364 \\ 6.7568 \\ 7.5150 \end{bmatrix}$$

Iteraciones

$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
3.6364	7.0523	8.4418	9.0069
6.7568	7.5692	7.8997	8.0341
7.5150	10.5719	11.8153	12.3210
Error $\delta_{\ \cdot\ _{\infty}}$: 3.4159	1.8936	0.0478	0.0187

$$2 \text{ c.s.e. } \{ 9.0 \ 8.0 \ 12 \} \quad x^{(4)} = \{ 9.2368 \ 8.0888 \ 12.5268 \}$$

d) El radio espectral $\rho(T_j) = 0.6378 < 1$, por que el Método de Jacobi también es convergente.

Problema 2

Solución

a)

$$g(h) = 0.5879 - 0.02265 \times \frac{1}{h^2}$$

$$g'(h) = 0.04531 \times \frac{1}{h^3}$$

Se observa que $g'(h) > 0$ en el intervalo $[0,4;1]$, por lo tanto, la función $g(h)$ es creciente en $[0,4;1]$.

Evaluando $[0.4463; 0.5653] = [g(0.4), g(1)] \subset [0.4,1]$, asegura la existencia del punto fijo.

Además, $g'(h)$ es decreciente, luego $g'(0.4) = 0,7079 < 1$, asegura la unicidad del punto fijo.

b)

i	a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)	error
0	0.4	1	0.7	+	-	-	0.3
1	0.4	0.7	0.55	+	-	-	0.15
2	0.4	0.55	0.475	+	-	+	0.075
3	0.475	0.55	0.5125				0.0375

c)

```
function z=biseccion(f,a,b,Tol)
c=(a+b)/2;
error=(b-a)/2;
z=[a b c f(a) f(b) f(c) error]
```

```
while error>Tol
    if f(a)*f(c)<0
        b=c;
    else
        a=c;
    end
    c=(a+b)/2;
    error= (b-a)/2;
    z=[z;a b c f(a) f(b) f(c) error];
end
```

Problema 3

Solución

Parte a)

Considerando los 90cm, se toma los 7 puntos, donde la altura en los extremos es 0.

$$A = (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + y_6) \frac{h}{2} = (0 + 2(13) + 2(14) + 2(16) + 2(18) + 2(15) + 0) \cdot \frac{15}{2} = 1140$$

Pero como es simétrico y se desea en m^2

$$A_t = 2 \cdot A \cdot 10^{-4} = 0.2280$$

Parte b)

Igualmente considerando los 90cm, se toma los 7 puntos, donde la altura en los extremos es 0.

$$A = (y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + y_6) \frac{3h}{8} = (0 + 3(13) + 3(14) + 2(16) + 3(18) + 3(15) + 0) \cdot \frac{3 \cdot 15}{8} = 1192.5$$

Pero como es simétrico y se desea en m^2

$$A_s = 2 \cdot A \cdot 10^{-4} = 0.2385$$

Parte c)

Los errores en cada ítem son: 0.01336 y 0.00286, por lo tanto con el método de Simpson de 3/8 se tiene una mejor estimación del área.

Parte d)

```
clc;clear;
x=linspace(0,90,7);
h=15;
y=[0 13 14 16 18 15 0];
%Metodo del simpson 1/3
coef=y*0+1;
coef(2:2:end-1)=4;
coef(3:2:end-1)=2
I=(h/3)*(coef*y)
fprintf('El area es %.5f\n',2*I*1e-4);
```

Problema 4

Solución

a)

$$\dot{x} = v \quad x(0) = 2$$

$$\dot{v} = \frac{-4x-12v}{9} \quad v(0) = 1$$

b)

$$h=0.1$$

$$t_{i+1}=t_i+h$$

$$x_{i+1}=x_i+h*v_i$$

$$v_{i+1}=v_i+h*(-4x_i-12v_i)/9$$

t	x	v
0.0000	2.0000	1.0000
0.1000	2.1000	0.7778
0.2000	2.1778	0.5807
0.3000	2.2359	0.4065
0.4000	2.2765	0.2529
0.5000	2.3018	0.1180
0.6000	2.3136	0.0000
0.7000	2.3136	-0.1028

c)

solución analítica

$$x(t)=\exp(-2*t/3)*(2+7*t/3)$$

$$v(t)=\exp(-2*t/3)*(1-14*t/9)$$

$$x(0.7)=2.2784 \quad (\text{Error}=0.0352)$$

$$v(0.7)=-0.0557 \quad (\text{Error}=0.0471)$$

d)

xmax=2.3136 cuando v=0 y t=0.6

Valores exactos:

$$v'(t)=0 \quad t=9/14 \quad \text{Err}=0.0429$$

$$x_{\max}=x(9/14)=2.28 \quad \text{Err}=0.0336$$

e)

`% p4.m`

`clc`

`clear all`

`x=dsolve('9*D2x+4*x+12*Dx=0','x(0)=2','Dx(0)=1','t')`

`n=7,h=0.7/n`

`tt=0:h:0.7`

`xx=double(subs(x,tt))`

`vv=double(subs(diff(x),tt))`

`disp([tt' xx' vv'])`

`% Euler`

`te(1)=0,xe(1)=2,ve(1)=1`

`for i=1:n`

`te(i+1)=te(i)+h;`

`xe(i+1)=xe(i)+h*ve(i);`

`ve(i+1)=ve(i)+h*-1/9*(4*xe(i)+12*ve(i));`

`end`

`disp([te' xe' ve'])`

`plot(tt,xx,tt,vv,te,xe,te,ve), grid, legend('x(t)','v(t)','xE(t)','vE(t)')`

`errx=abs(xe(8)-xx(8))`

`errv=abs(ve(8)-vv(8))`

`xmax=double(subs(x,9/14))`