UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA | P.A. 2018-2
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA | 19/10/2018
DACBHCC | 12:00-13:50 h

EXAMEN PARCIAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO Y CALCULADORA**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**
- **PROHIBIDO EL USO DE CELULARES U OTROS EQUIPOS DE COMUNICACION ELECTRONICA**
- **DURACION: 110 MINUTOS**

Docentes: Garrido, Rosa – Castro, Robert – Pantoja, Hermes – Obregón, Máximo

Problema 1

Dados los 3 vértices de un triángulo (x_1, y_1); (x_2, y_2) y (x_3, y_3), cuya área se puede calcular mediante la siguiente determinante:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

(a) **(2.5 P)** Si las coordenadas en metros fueron medidas aproximadamente: x_1=2.55, y_1=4.12, x_2=6.01, y_2=2.16, x_3=4.18 y y_3=5.90. Determine el error relativo permisible para cada una de las 6 coordenadas a fin de que el cálculo del área tenga un error que no exceda el 5%.

(b) **(2.5 P)** Muestre el valor del Área A redondeado a 1 decimal, e indica su representación en el sistema de 32 bits de simple precisión según la norma IEEE-754 y a qué número decimal de máquina se aproxima al ser almacenado.

Problema 2

Un sistema de tres masas suspendidas verticalmente por una serie de resortes se muestra en la Fig 1 a). En un instante inicial el sistema está sujeto y luego se suelta empezando a moverse por acción del peso de cada masa. Necesitamos determinar el valor de los desplazamientos en el estado estacionario (cuando el sistema no se mueve).

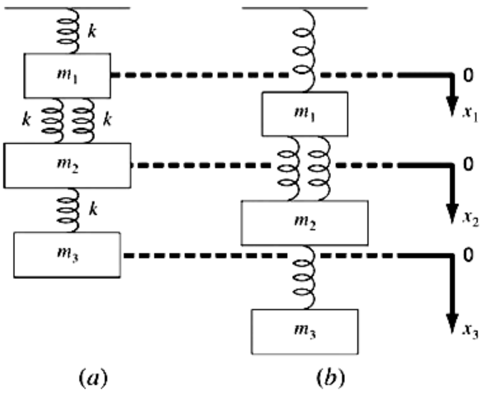


Fig 1 (a) Sistema en su posición inicial (b) Sistema desplazado por el peso de cada masa

(a) **(1P)** Demuestre usando la ley de Newton que la dinámica del sistema está dado por:

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = 2k(x_2 - x_1) + m_1 g - kx_1$$

$$m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} = k(x_3 - x_2) + m_2 g - 2k(x_2 - x_1)$$

$$m_3\frac{d^2x_3}{dt^2} = m_3 g - k(x_3 - x_2)$$

Parámetros del sistema:

$m_1 = 2\ kg,\ m_2 = 3kg,\ m_3 = 2.5kg\ , k = 50\,\frac{Kg}{s^2}\ , g = 10\ \frac{m}{s^2}$

Determine el sistema lineal Kx=W, donde K es la matriz de Rigidez, W la matriz de pesos, x es el vector desplazamientos.

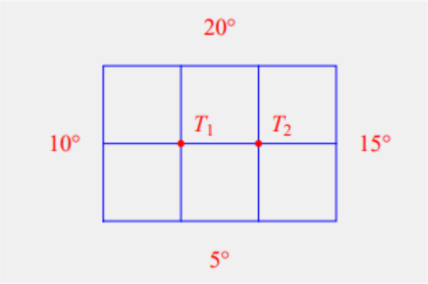
(b) **(1P)** ¿Es el sistema lineal consistente? ¿Tiene solución única? Justifique sin resolver el sistema lineal.

(c) **(2P)** Aplicar el método de la Eliminación Gaussiana para determinar el vector desplazamientos.

(d) **(1P)** Al usar el comando de MATLAB: [L, U, P]=lu(K), ¿ Cuáles son los valores obtenidos de las matrices L, U y P? ¿Cómo interpretaría el resultado de la matriz P?

Problema 3

La distribución uniforme de temperaturas en una placa de un metal se aproxima usando el método de diferencias finitas, que consiste en determinar la temperatura de los puntos interiores usando el promedio de las temperaturas en los puntos alrededor.



(a) (**0.5P**) Modele el sistema de ecuaciones.

(b) (**0.5P**) Al resolver el sistema de ecuaciones, determine si el método de Jacobi es convergente para cualquier punto inicial.

(c) (**2P**) Realice iteraciones del método de Gauss Seidel, partiendo de un vector inicial nulo, hasta alcanzar una Tolerancia de $5*10^{-2}$, use la norma infinita para estimar el error. Realice por lo menos dos iteraciones paso a paso.

(d) (**1P**) Determine la relación que existe entre los radios espectrales de la Matriz de Iteración de Jacobi y de Gauss Seidel.

(e) (**1P**) Implemente un script en MATLAB que resuelva c).

Problema 4

El llenado de un tanque en litros se encuentra en función al tiempo en segundos a través de la siguiente relación:

$$V = e^{\frac{6t}{t+1}} + \ln(t+1)$$

Se desea saber en qué instante de tiempo, alcanza llenar el tanque si esta tiene una capacidad permitida de 100 litros, además, se sabe que siempre está entre 1 y 5 segundos

(a) **(2P)** Estime la solución, utilizando el método de la Bisección a partir del rango conocido con 4 iteraciones indicando su error respectivo.

(b) **(1P)** Cuantas iteraciones se necesitan con el método de la Bisección para tener un error de 0.01 segundos.

(c) **(1P)** Determine a y b para que la ecuación: $t = \ln(a - \ln(t+1))(t+1)/b$, sea un algoritmo de punto fijo para resolver el problema del llenado del tanque. Verifique la convergencia.

(d) **(1P)** Desarrolle una rutina en MATLAB que permita encontrar la solución mediante el algoritmo del punto fijo encontrado en (c), usando 1000 iteraciones y considerando t inicial de 4 segundos.

Los Docentes

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA — P.A. 2018-2
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA — 19/10/2018
DACBHCC — 12:00-13:50 h

Solucionario

Problema 1

a)

$$\boldsymbol{A=\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1-x_1y_3+x_2y_3-x_3y_2)}$$

$$\boldsymbol{A=4.6728}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon_A=5\%*A=0.2338}$$

Aplicando principio de igual efecto, los errores permisibles serán:

$\boldsymbol{\varepsilon}_{x_1}=\frac{\varepsilon_A}{6\left|\frac{\partial_A}{\partial x_1}\right|}=0.0208\ (0.82\%)$

$\boldsymbol{\varepsilon}_{y_1}=\frac{\varepsilon_A}{6\left|\frac{\partial_A}{\partial y_1}\right|}=0.0426\ (1.03\%)$

$\boldsymbol{\varepsilon}_{x_2}=\frac{\varepsilon_A}{6\left|\frac{\partial_A}{\partial x_2}\right|}=0.0438\ (0.73\%)$

$\boldsymbol{\varepsilon}_{y_2}=\frac{\varepsilon_A}{6\left|\frac{\partial_A}{\partial y_2}\right|}=0.0478\ (2.21\%)$

$\boldsymbol{\varepsilon}_{x_3}=\frac{\varepsilon_A}{6\left|\frac{\partial_A}{\partial x_3}\right|}=0.0398\ (0.95\%)$

$\boldsymbol{\varepsilon}_{y_3}=\frac{\varepsilon_A}{6\left|\frac{\partial_A}{\partial y_3}\right|}=0.0225\ (0.38\%)$

b)

A=4.7=100.10110011001100110011 0=(-1)^0*(1.0010110011001100110011 0)*2^2

Ei-127=2 Ei=129=10000001

0	**10000001**	**00101100110011001100110**

Número de máquina más cercano:

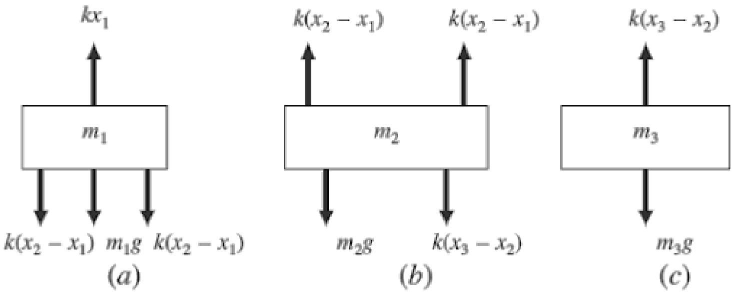
A=(1+2^-3+2^-5+2^-6+…)*4=4.699999809265137

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA **P.A. 2018-2**
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA **19/10/2018**
DACBHCC **12:00-13:50 h**

Problema 2

Solución Problema 2

(a) Diagramas del cuerpo Libre para las tres masas



Aplicando la ley de Newton : $m_i \ddot{x}_i = \sum \quad f_i$, considerando las fuerzas que contribuyen al movimiento (+), hacia abajo y las fuerzas en contra del movimiento (-), hacia arriba

En la masa m_1: $\quad m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = 2k(x_2 - x_1) + m_1 g - k x_1$

En la masa m_2: $\quad m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = k(x_3 - x_2) + m_2 g - 2k(x_2 - x_1)$

En la masa m_3: $\quad m_3 \frac{d^2 x_3}{dt^2} = m_3 g - k(x_3 - x_2)$

En el estado estacionario (dejan de oscilar las masas)

$$2k(x_1 - x_2) + kx_1 = m_1 g$$
$$k(x_2 - x_3) + 2k(x_2 - x_1) = m_2 g$$
$$k(x_3 - x_2) = m_3 g$$

Formando el sistema Lineal:

$$\begin{bmatrix} 3k & -2k & 0 \\ -2k & 3k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 g \\ m_2 g \\ m_3 g \end{bmatrix}$$

Como $g/k = 1/5$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0.2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

(b) Aumentando el sistema

Encontrando el rango:

$$[K|W] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 0 & 0.4 \\ -2 & 3 & -1 & 0.6 \\ 0 & -1 & 1 & 0.5 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 0 & 0.4 \\ 0 & \frac{5}{3} & -1 & \\ 0 & -1 & 1 & \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{5}{3} & -1 & \frac{13}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{51}{10} \end{array}\right]$$

Por lo que rango([K|W])=rango([K])=3 por lo que es consistente y de única solución.

(c)

Eliminación Gaussiana

I Triangulación

$$\begin{array}{c} \\ \left(-\frac{2}{3}\right) \\ (0) \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 0 & 0.4 \\ -2 & 3 & -1 & 0.6 \\ 0 & -1 & 1 & 0.5 \end{array}\right] \begin{array}{l} f_1 \\ f_2 = f_2 + \frac{2}{3} f_1 \\ f_3 = f_3 \end{array}$$

$$\left(-\tfrac{3}{5}\right)\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{5}{3} & -1 & \frac{13}{15} \\ 0 & -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \begin{matrix} f_2 \\ f_3 = f_3 + \frac{3}{5} f_2 \end{matrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{5}{3} & -1 & \frac{13}{15} \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{51}{50} \end{array}\right]$$

II Sustitución Inversa

$x_3 = \frac{51}{50} * \frac{5}{2} = \frac{51}{20} = 2.55m$

$x_2 = \frac{3}{5}\left(\frac{13}{30} + x_3\right) = \frac{41}{20} = 2.05m$

$x_1 = \frac{1}{3}(2 + 2x_2) = \frac{3}{2} = 1.5m$

(d) El comando de Matlab [L,U,P]= lu(K)

L= $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & 1 \end{bmatrix}$ U= $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$ P= $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

P es la matriz de permutaciones, si es identidad significa que no hubo intercambio de filas.

Problema 3

(a) Definiendo las variables:

T_1: La temperatura en el punto interior 1.

T_2: La temperatura en el punto interior 2.

$$4T_1 - T_2 = 35$$

$$-T_1 + 4T_2 = 40$$

(b) Dado que la matriz de coeficientes del sistema

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Es estrictamente diagonalmente dominante, entonces el método de Jacobi es convergente para cualquier valor inicial.

(c)

$$T_1^{(k+1)} = (T_2^{(k)} + 35)/4$$
$$T_2^{(k+1)} = (T_1^{(k+1)} + 40)/4$$

Donde: $T_1^{(0)} = 0$; $T_2^{(0)} = 0$;

Iteración 1:

$$T_1^{(1)} = (T_2^{(0)} + 35) \times \frac{1}{4} = \frac{35}{4} = 8{,}75$$
$$T_2^{(1)} = (T_1^{(1)} + 40) \times \frac{1}{4} = \frac{\frac{35}{4} + 40}{4} = \frac{195}{16} = 12{,}1875$$

$$Error = \epsilon = \left\| \begin{pmatrix} \frac{35}{4} \\ \frac{195}{16} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \frac{195}{16} = 12{,}1875$$

Iteración 2:

$$T_1^{(2)} = (T_2^{(1)} + 35) \times \frac{1}{4} = \frac{\frac{195}{16} + 35}{4} = \frac{755}{64} = 11{,}7969$$
$$T_2^{(1)} = (T_1^{(2)} + 40) \times \frac{1}{4} = \frac{\frac{755}{64} + 40}{4} = \frac{3315}{256} = 12{,}9492$$

$$Error = \epsilon = \left\| \begin{pmatrix} \frac{755}{64} \\ \frac{3315}{256} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{35}{4} \\ \frac{195}{16} \end{pmatrix} \right\|_\infty = \frac{195}{64} = 3{,}0469$$

Iteración 3:

$$T_1^{(3)} = 11{,}9873$$
$$T_2^{(3)} = 12{,}9968$$

$$Error = \epsilon = 0{,}1904$$

Iteración 4:

$$T_1^{(4)} = 11{,}9992$$
$$T_2^{(4)} = 12{,}9998$$

$$Error = \epsilon = 0{,}0119$$

(d) La relación que se cumple es:

$$\rho(Tj) = \sqrt{\rho(T_{gs})}$$

(e)

```
A=[4 -1;-1 4]
b=[35;40]
x0=[0;0]
z=[x0'];
D=diag(diag(A))
```

```
L=-tril(A,-1)
U=-triu(A,1)
Tgs=inv(D-L)*U;
cgs=inv(D-L)*b;
rho=max(abs(eig(Tgs)));
Tol=5*1e-2
error=1;
while error>Tol
    x1=Tgs*x0+cgs;
    error=norm(x1-x0,inf);
    z=[z;x1'];
    x0=x1;
end
z
```

Problema 4

Parte a)

Utilizando la función f(t)=V(t)-100=0

$$f(x) := e^{\frac{6 \cdot x}{x+1}} + \ln(x+1) - 100$$

$f(1) = -79.221$	$f(3) = -8.597$	$f(5) = 50.205$
$f(3) = -8.597$	$f(4) = 23.12$	$f(5) = 50.205$
$f(3) = -8.597$	$f(3.5) = 7.847$	$f(4) = 23.12$
$f(3) = -8.597$	$f(3.25) = -0.232$	$f(3.5) = 7.847$

Por lo tanto t=3.25segundos con un error de 0.25

Parte b)

Usando

$$\varepsilon_a{}^k = \frac{b-a}{2^k} \qquad \log\left(\frac{5-1}{0.01}, 2\right) = 8.644$$

K=9 iteraciones

Parte c)

Haciendo el despeje se tiene que:

$$g(x) := \ln(100 - \ln(x+1)) \cdot \frac{(x+1)}{6}$$

Por lo tanto: a=100 y b=6

Sobre la convergencia, considerando que la derivada es:

$$dg(x) := \frac{d}{dx} g(x) \rightarrow \frac{\ln(100 - \ln(x+1))}{6} + \frac{\frac{x}{6} + \frac{1}{6}}{(x+1) \cdot (\ln(x+1) - 100)}$$

Considerando que las funciones son creciente y decreciente se evalúa en los extremos y se verifica las 2 condiciones de convergencia.

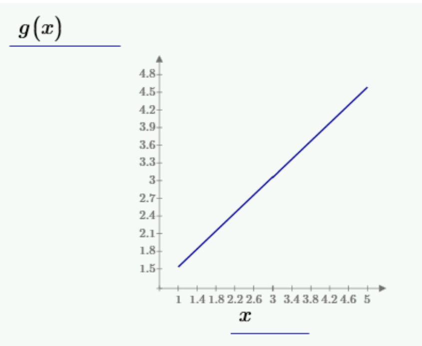
Primera condición:

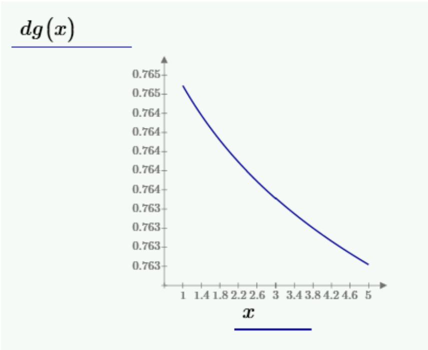
$Si\ para\ cualquier\ \ x \in [a,b]\ \ entonces\ \ g(x) \in\ [a,b]$

Segunda condición:

$Si\ para\ cualquier\ \ x \in [a,b]\ \ entonces\ \ |g'(x)| \leq 1.$

G(x)





Por lo tanto Converge.

Parte d)

```
g=inline('log(100-log(x+1))*(x+1)/6');
x=4;
for i=1:1000
    x=g(x)
end
disp(x)
```