UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA — P.A. 2018-1
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA — 06/07/2018
DACBHCC — 12:00-13:50 h

EXAMEN FINAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO Y CALCULADORA**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**
- **PROHIBIDO EL USO DE CELULARES U OTROS EQUIPOS DE COMUNICACION ELECTRONICA**
- **DURACION: 110 MINUTOS**

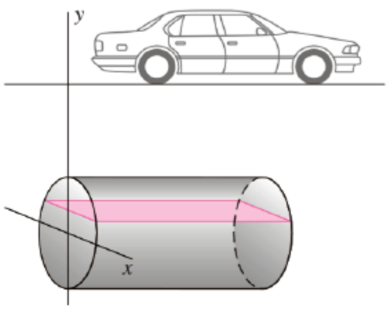
Problema 1

Se lanza un proyectil que describe una trayectoria con la función spline cúbico natural, si se registraron las siguientes alturas de 18, 26 y 25 metros, estas alturas fueron tomadas cada metro en el eje horizontal. En base en esta información, resuelva lo siguiente:

a) **(1 P)** Elabore la tabla de datos donde registre valores para el eje x e y en metros, considerando que el primer punto se ubica en x=0
b) (**2 P**) Calcule el spline cúbico natural que se ajuste a los 3 puntos registrados.
c) **(1 P)** Determine la altura máxima y a que distancia horizontal se encuentra respecto al primer punto.
d) **(1 P**) Desarrolle un script en Matlab para calcular el ítem c).

Problema 2

En un grifo el almacenamiento de gasolina se realiza en un tanque cilíndrico enterrado de costado. Suponga que se necesitó 15 días para vaciar todo el tanque, con la parte más alta del tanque a una profundidad de 1.5 metros por debajo de la superficie. El tanque tiene un radio de 1.8 metros y 3 metros de largo. La densidad de la gasolina es 680 kg/m^3. Suponga el tapón para la gasolina de cada automóvil se encuentra a una altura de 0.6 metros arriba del suelo.



a) **(2.5 P)** El trabajo necesario para vaciar toda la gasolina del tanque, originalmente lleno, en los automóviles está dado por:

$$W = \int_{-1.8}^{1.8} 4080\, g\, \sqrt{1.8^2 - y^2}\,(3.9 - y)\, dy$$

Donde g, es la gravedad: 9.8 m/s^2
Aproxime el trabajo W utilizando el método de cuadratura Gaussiana usando 3 puntos.

b) **(1 P)** Con la información obtenida en a). Suponga que en cada automóvil se realizaba 3 J/h de trabajo para vaciar la gasolina del tanque con las condiciones mencionadas y que se realizó un trabajo de 5h diarias. ¿Cuántos automóviles serán necesario para vaciar todo el tanque?

c) **(1.5 P)** Implemente un script en **MATLAB** que resuelva a) y halle el error cometido.

Problema 3

La dinámica de un sistema forzado masa-resorte-amortiguador se representa con la EDO de segundo orden siguiente:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + k_1 x + k_2 x^3 = Pcos(wt)$$

Donde m=1 kg, c=0.4 N-s/m, P=0.5 N y w=0.5 rad/s y el resorte es no lineal, k_1=1 y k_2=0.5. Si en el instante inicial, x=0 y dx/dt=0.1 m/s.

a) **(1.5 P)** Determine la posición y velocidad en t=0.1 seg, use Euler (Δt=0.05 seg)
b) **(1.5 P)** Determine la posición y velocidad en t=0.1 seg, use Taylor de orden 2 (Δt=0.1 seg)
c) **(1 P)** Determine el error para a) y b) si los valores exactos son x(0.1)=0.012251 m y v(0.1)=0.144503 m/s
d) **(1 P)** Escriba un programa en MATLAB, para resolver a), b) y c)

Problema 4

La Deflexión transversal u (x) de un cable de longitud L que se fija en ambos extremos, se da como una solución de:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{Tu}{R} + \frac{qx(x-L)}{2R}$$

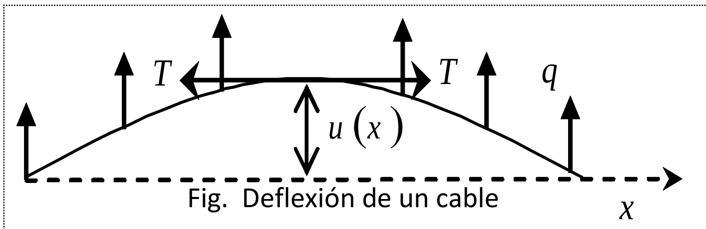


Fig. Deflexión de un cable

Dónde:

T = Tensión en el cable
R = Rigidez a la flexión
q = Carga transversal distribuida

Dado $L = 50''$, $T = 2000\,\text{lbs}$, $q = 75\,\frac{\text{lbs}}{\text{in}}$, y $R = 75\times10^6\ \text{lbs}\cdot\text{in}^2$ 7

a) **(1 P)** Realice la distribución de puntos en el eje x indicando las condiciones de frontera conocidas. Use el tamaño de paso h=12.5".
b) **(1 P)** Usando el método de las diferencias finitas con segunda diferencia central aproxime la ecuación diferencial. Coloque las condiciones en la frontera. El resultado serán ecuaciones algebraicas a resolver.
c) **(1 P)** Determine el valor de la deflexión en el centro del cable.
d) **(1 P)** ¿Cuántas cifras significativas tiene su respuesta si se conoce que el error relativo porcentual es del 4.7%?
e) **(1 P)** Complete el código en Matlab que resuelve el Problema

```
R=75*10^6;  q=75;  T=2000;  L=50;  h=12.5;   a=T/R*h^2;   d=q*h^2/(2*R);
x0= ------------------ ;    xN= -------------------;
x= --------------------;          % a)
N= --------------------;
u0= ------------------;      uN= ------------------;
% b)
A= - (2+a)*eye(N-2)+----------------------------------:% Use diag para  codiagonales
i= ------------------;                                            % direcciones
B=d*( ---------------) ' ;
% c)
u= A\B;
umax=-----------------------;
```

Los Profesores

Solucionario

Problema 1

Parte a)

i	x	y
0	0	18
1	1	26
2	2	25

Parte b)

i	x	y	hi	y[xi,xi+1]
0	0	18	1	8
1	1	26	1	-1
2	2	25		

La ecuación es:

4M1=-54 =>M1=-13.5

Usando el formulario:

$$a_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{6h_i}$$

$$b_i = \frac{M_i}{2}$$

$$c_i = y[x_i, x_{i+1}] - \frac{M_{i+1} + 2M_i}{6} h_i$$

$$d_i = y_i$$

si=ai(x-xi)^3+bi(x-xi)^2+ci(x-xi)+di

S	x	a	b	c	d
0	[0-1]	-2.25	0	10.25	18
1	[1-2]	2.25	-6.75	3.5	26

S0=-2.25(x)^3+10.25(x)+18

S1=2.25(x-1)^3-6.75(x-1)^2+3.5(x-1)+26

Parte c)

Si se tabula los 3 puntos en el plano cartesiano, a simple vista, nos damos cuenta que la altura máxima estaría en el segundo intervalo, por lo que se debería usar el segundo polinomio.

Para hallar el punto máximo se debe derivar e igualar a 0.

S1'=(27/4) (x-1)^2-(27/2)x+17=0 =>x= 1.3061

Y=26.5034

Parte d)

```
clear;clc;
syms x
p=2.25*(x-1)^3-6.75*(x-1)^2+3.5*(x-1)+26;
f='2.25*(x-1)^3-6.75*(x-1)^2+3.5*(x-1)+26';
fp='(27*(x - 1)^2)/4 - (27*x)/2 + 17'
yp=diff(p)
%solve(yp,x)
vx=fzero(fp,[1 2])
vy=subs(f,x,vx)
```

Problema 2
Solución

a) Usando el polinomio de Legendre

Xlegendre	c	Xi(ab)	f(xi)
-0.7745966692	0.5555555555	-1.3943	$2.4099*10^5$
0.0	0.8888888888	0	$2.8069*10^5$
+0.7745966692	0.5555555555	1.3943	$1.1406*10^5$

Aplicando $\frac{(b-a)}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$

I = $8{,}0415*10^5$=80 4150 Joules

b) Cada auto realiza

$$3\,\frac{J}{h} \times 15d \times 5\,\frac{h}{d} = 225\,J$$

de trabajo.

Entonces se requerirá

$$\frac{\mathbf{80\,4150}}{\mathbf{225}} \approx \mathbf{3574}$$

autos para vaciar la gasolina del tanque.

C)

```
clc
x=[-0.7745966692;0;0.7745966692]
c=[0.5555555555;0.8888888888;0.5555555555]
syms t
a=-1.8
b=1.8
f_x = inline(((a+b)+t*(b-a))/2,'t')
xab=f_x(x)
f=inline('4080*9.8*sqrt(1.8^2-x.^2).*(3.9-x)')
f(xab)
Igauss=(b-a)*dot(c,f(xab))/2
syms x
Iexacta = vpa(int(4080*9.8*sqrt(1.8^2-x.^2).*(3.9-x),-1.8,1.8),6)
Error = vpa(abs(Iexacta-Igauss),6)
```

Problema 3

a) Reduciendo a un sistema de primer orden:

$$\frac{dx}{dt}=v$$

$$\frac{dv}{dt}= 0.5cos(0.5t)-0.4v-x-0.5x^3$$

Aplicando Euler:

$$t_{n+1} = t_n + h$$

$$x_{n+1} = x_n + h * v_n$$

$$v_{n+1} = v_n + h(0.5cos(0.5t_n)-0.4v_n-x_n-0.5{x_n}^3)$$

t	0	0.0500	0.1000
x	0	0.0050	0.01115
v	0.1000	0.1230	0.145282

b) Aplicando Taylor de orden 2:

$$t_{n+1} = t_n + h$$

$$x_{n+1} = x_n + h * v_n + \frac{h^2}{2}(0.5cos(0.5t_n)-0.4v_n-x_n-0.5{x_n}^3)$$

$$v_{n+1} = v_n + h(0.5cos(0.5t_n)-0.4v_n-x_n-0.5{x_n}^3) +$$

$$+\frac{h^2}{2}(-0.25sen(0.5t_n)-0.4(0.5cos(0.5t_n)-0.4v_n-x_n-0.5{x_n}^3)-v_n-1.5{x_n}^2v_n)$$

t	0	0.1
x	0	0.0123
v	0.1000	0.14458

c)

Errores:

Errx_Euler = 0.001101
Errv_Euler = 0.000779
Errx_Taylor2 = 0.000049
Errv_Taylor2 = 0.000077

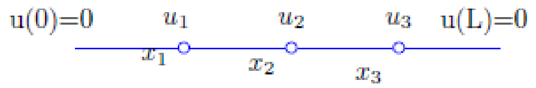
d)

```
% resorte.m
clc, clear all, format long
% Euler
t(1)=0,x(1)=0,v(1)=0.1,h=0.05
t(2)=t(1)+h
x(2)=x(1)+h*v(1)
v(2)=v(1)+h*(0.5*cos(0.5*t(1))-0.4*v(1)-x(1)-0.5*x(1)^3)
t(3)=t(2)+h
x(3)=x(2)+h*v(2)
v(3)=v(2)+h*(0.5*cos(0.5*t(2))-0.4*v(2)-x(2)-0.5*x(2)^3)
% Taylor 2
tt(1)=0,xx(1)=0,vv(1)=0.1,h=0.1
tt(2)=tt(1)+h
vp=0.5*cos(0.5*tt(1))-0.4*vv(1)-x(1)-0.5*xx(1)^3
xx(2)=xx(1)+h*vv(1)+h^2/2*vp
vpp=-0.5^2*sin(0.5*tt(1))-0.4*vp-v(1)-0.5*3*xx(1)^2*vv(1)
vv(2)=vv(1)+h*vp+h^2/2*vpp
% Error
xe=0.012251
ve=0.144503
errxEuler=abs(xe-x(3))
errvEuler=abs(ve-v(3))
errxT2=abs(xe-xx(2))
errvT2=abs(ve-vv(2))
```

Problema 4

Problema 4

a)



$x_0 = 0$, $x_1 = 12.5$, $x_2 = 25$, $x_3 = 37.5$, $x_4 = 50$

b) Considerando las diferencias finitas de segundo orden centrales:

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = \frac{T}{R} * u_i + \frac{q}{2R} x_i * (x_i - 50)$$

Hacer:

$$a = \frac{T * h^2}{R} \text{ , } b = \frac{q * h^2}{2R}$$

$u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1} = a * u_i + b * x_i * (x_i - 50)$
$u_{i-1} - (2 + a)u_i + u_{i+1} = b * x_i * (x_i - 50)$
Para i= 1,2,3
$i = 1 \quad u_0 - (2 + a)u_1 + u_2 = b * x_1 * (x_1 - 50)$
$i = 2 \quad u_1 - (2 + a)u_2 + u_3 = b * x_2 * (x_2 - 50)$
$i = 3 \quad u_2 - (2 + a)u_3 + u_4 = b * x_3 * (x_3 - 50)$

$$\begin{bmatrix} -(2+a) & 1 & 0 \\ 1 & -(2+a) & 1 \\ 0 & 1 & -(2+a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bx_1 * (x_1 - 50) \\ bx_2 * (x_2 - 50) \\ bx_3 * (x_3 - 50) \end{bmatrix}$$

c) Solución del sistema Lineal

$$u= \begin{bmatrix} 0.0606 \\ 0.0848 \\ 0.0606 \end{bmatrix}$$

$\boxed{u(L/2) = 0.0848 \text{ ''}}$

d) Comparando las cifras significativas
$\delta = 0.047 = 0.47 * 10^{-1} < 0.5 * 10^{-n}$, por lo que el resultado solo tiene 1 c.s.e.

e) Progrma en Matlab

```
R=75*10^6;    q=75;    T=2000;    L=50;    h=12.5;       a=T/R*h^2;
d=q*h^2/(2*R);
x0= 0;   xN= L;
x= x0:h:xN-;                % a)
N= length(x);
u0= 0;     uN= 0;
% b)
A=-(2+a)*eye(N-2)+diag(ones(N-3,1),1)+diag(ones(N-3,1),-1);%Use-diag.
i=2:N-1-----------------;                                            %
direcciones
B=d*( x(i)*(x(i)-L)) ' ;
% c)
u= A\B;
umax=max(u);
```