UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA
DACBHCC

P.A. 2017-1
25/07/2017

EXAMEN SUSTITUTORIO DE METODOS NUMERICOS (MB536)

- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO Y CALCULADORA**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**
- **PROHIBIDO EL USO DE CELULARES U OTROS EQUIPOS DE COMUNICACION ELECTRONICA**
- **DURACION: 110 MINUTOS**

Problema 1

Una fábrica de automóviles produce dos modelos A y B. El modelo A requiere 1 hora de mano de obra para pintar y 9 horas de mano de obra en pulido, el modelo B requiere de 12 horas de mano de obra para pintar y 1 hora de mano de obra de pulido. Durante un día se dispone de 100 horas de mano de obra disponibles para el pintado y 200 horas de mano de obra para el pulido. Considerando a **x** como la cantidad de vehículos producidos del modelo A e **y** como la cantidad de vehículos producidos del modelo B. ¿Cuántos automóviles de cada modelo pueden ser producidos por día si se utilizan todas las horas de mano de obra posible?

a) **(1.0 P)** Plantee el sistema de ecuaciones en el orden adecuado para que el sistema converja por cualquiera de los métodos iterativos.
b) **(2.0 P)** Plantee la ecuación matricial de recurrencia para resolver el sistema por el método de Jacobi.
c) **(1.0 P)** Si se considera que aplicando el método de Jacobi hasta la tercera iteración partiendo del vector nulo, nos da la solución. ¿Cuantos automóviles del modelo A y B se pueden producir por día, si se utilizan la mayor cantidad de horas de mano de obra posible?
d) **(1.0 P)** Desarrolle un programa en Matlab que permita calcular la solución del sistema de ecuaciones planteado hasta alcanzar un error de 1e-14, usando el método Gauss-Seidel.

Problema 2

Se tiene un canal rectangular de base b =5 [m] por el cual escurre un caudal Q =15 [m^3/seg]. Se sabe que este canal posee una energía E =1.7 [m].
Se pide encontrar la altura crítica (altura donde el escurrimiento cambia de estado) sabiendo que se cumple la relación:

$$E = h_c + \frac{q^2}{2gh_c^2}$$

Donde $q \equiv Q/b$ y h_c >1es la altura crítica.

Seguir los pasos:
a) **(1.0 P)** Localice en forma tabular o gráfica los todos los ceros de la función cuya variable independiente es h_c . Debe determinar un dominio, para cada cero.
b) **(1.0 P)** Elija hc =1.3 como el valor inicial de la altura crítica y determine el algoritmo de Newton Raphson para este problema.
c) **(1.0 P)** Realice dos iteraciones usando Newton Raphson y comente la convergencia.
d) **(1.0 P)** Determine dos valores iniciales de localización a) y realice dos iteraciones usando el método de la Secante. Comente la convergencia con respecto a Newton Raphson.
e) **(1.0 P)** Use una función en MATLAB **(function)** que permita resolver el método de la Secante para cualquier función y diferentes puntos iniciales, así como para cualquier tolerancia impuesta. Las variables de salida deben ser la raíz aproximada y el número de iteraciones.

Ayuda : Algoritmo de la Secante : $x_{k+1} = x_k - f(x_k)\dfrac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_k)}$

Problema 3

Se desea determinar el área comprendida entre la elipse $\frac{(x-1)^2}{4}+y^2=1$ y la recta $y=|x|$

a) **(1.0 P)** Determine la función a integrar.
b) **(1.5 P)** Aproxime la integral mediante Simpson 1/3 con h=0.1 y su error, si el valor exacto es Ie=arcsen(4/5)-1/5.
c) **(1.5 P)** Aproxime la integral mediante la cuadratura de Gauss-Legendre con N=3, y su error.
d) **(1.0 P)** Escriba un programa en MATLAB que evalúe la integral de una función f(x) entre los límites [a, b] mediante la fórmula compuesta de Simpson 3/8, para número de particiones N, múltiplo de 3; sin usar instrucciones repetitivas como for o while.

Problema 4

La corriente sanguínea lleva un medicamento hacia el interior de un órgano con flujo de entrada $v_e = 3\frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$ y sale de él con un flujo de salida $v_s = 2\frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$. El órgano en cuestión tiene un volumen líquido de $125\ \text{cm}^3$. La concentración del medicamento en la sangre que entra en el órgano es de $0{,}2\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

a) **(1.0P)** Modele la ecuación diferencial que permita encontrar la cantidad de medicamentos en el órgano si inicialmente no había vestigio alguno del medicamento.

Indicación: Si $\mathrm{x} = \mathrm{x(t)}$ es la cantidad en gramos de la sustancia, en el instante t (a los t minutos de comenzar el proceso) en un recipiente, V capacidad del recipiente. Como la concentración de salida es la misma que hay en el recipiente, entonces es $\mathrm{C_s} = \frac{\mathrm{x(t)}}{\mathrm{V+(v_e-v_s)t}}$.
Donde v_e: flujo de entrada; , v_s: flujo de salida

b) **(2.0 P)** Utilice el método de Euler para aproximar la cantidad de medicamente en el órgano al cabo de 2 segundos. Utilice h=1 segundo.
c) **(2.0 P)** Implemente una función en MatLab, que permita graficar la solución aproximada por Euler y la solución exacta, con la siguiente cabecera

```
function []=eulergraf(f,fex,a,b,h,y0)
%y'=f(t,y);   a<=t<=b
%y(a)=y0
%h: tamaño de paso
%fex: solución exacta
```

Los Profesores

Solución 1:

a) Considerando:

1x+12y=100

9x+1y=200

Para que converja intercambiamos las filas

9x+1y=200

x+12y=100

La matriz A, es estrictamente diagonal dominante, por lo tanto, converge para los 2 métodos

b) Calculando las componentes

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 12 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 200 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$Tj = D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 1/9 & 0 \\ 0 & 1/12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/9 \\ -1/12 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.1111 \\ -0.0833 & 0 \end{bmatrix}$$

$$cj = D^{-1}b = \begin{bmatrix} 1/9 & 0 \\ 0 & 1/12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200/9 \\ 25/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16.66 \\ 11.11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.1111 \\ -0.0833 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 22.2222 \\ 8.3333 \end{bmatrix}$$

c) Primera iteración

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.1111 \\ -0.0833 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 22.2222 \\ 8.3333 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.2222 \\ 8.3333 \end{bmatrix}$$

Segunda iteración

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.1111 \\ -0.0833 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 22.2222 \\ 8.3333 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 22.2222 \\ 8.3333 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21.2963 \\ 6.4863 \end{bmatrix}$$

Tercera iteración

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.1111 \\ -0.0833 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21.2963 \\ 6.4863 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 22.2222 \\ 8.3333 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21.5021 \\ 6.5586 \end{bmatrix}$$

Se producirán aproximadamente 21 automóviles del modelo A y 6 del modelo B.

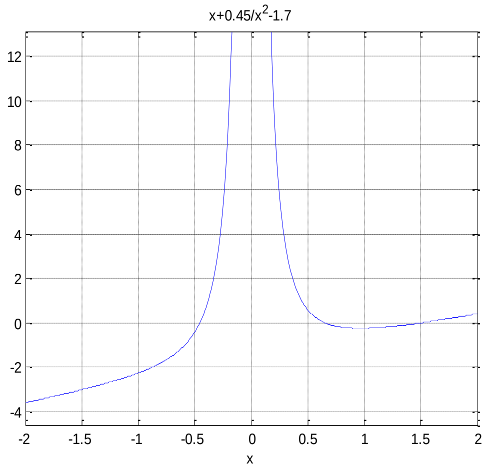
d)

```
A=[12 1
   1 9]
b=[200 100]'
xx=inv(A)*b
D=diag(diag(A)); L=-tril(A,-1); U=-triu(A,1);
T=inv(D-L)*U;  c=inv(D-L)*b;
x=[0 0]';
xa=x
TOL=1e-14;
NMAX=10000;
for i=1:NMAX
    x=T*x+c
    er=norm(x-xa,inf);
    xa=x;
    if er<TOL
        break
    end
end
disp(x)
```

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA — P.A. 2017-1
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA — 25/07/2017
DACBHCC

Pregunta 2

a)



$h_{1\in}$ [-0.5 -0.4] $h_{2\in}$ [0.6 0.7] $h_{3\in}$ [1.4 1.6]

b) considerando ho= 1.3

$$f(h_c) = h_c + \frac{q^2}{2gh_c^2} - E$$

$$f(h_c) = h_c + \frac{0.45}{h_c^2} - 1.7$$

$$f'(h) = 1 - 0.9h^{-3}$$

c) Dos iteraciones con Newton Raphson

$$h_1 = h_0 - \frac{f(h_0)}{f'(h_0)} = 1.3 - \frac{f(1.3)}{f'(1.3)} = 1.5265$$

$$h_2 = h_1 - \frac{f(h_1)}{f'(h_1)} = 1.5265 - \frac{f(1.5265)}{f'(1.5265)} = 1.5002$$

La convergencia es rápida.

d) Utilizando $h_0 = 1.3$ y $h_1 = 1.7$, iteremos:

$$h_2 = h_1 - f(h_1)\frac{h_1 - h_0}{f(h_1) - f(h_0)} = 1.7 - 0.1557\frac{1.7 - 1.3}{0.1557 - (-0.137)} = 1.4848$$

$$h_3 = h_2 - f(h_2)\frac{h_2 - h_1}{f(h_2) - f(h_1)} = 1.4848 - (-0.0111)\frac{1.4848 - 1.7}{-0.0111 - 0.1557} = 1.4991$$

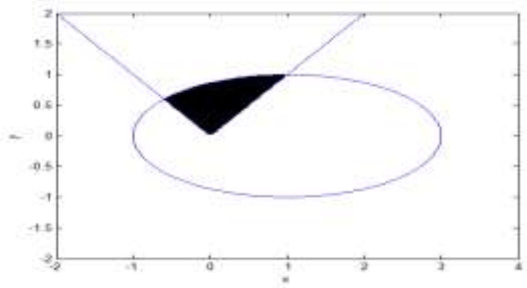
Es más lento que Newton Raphson.

e)

```
function [x,it]=secante(f,a,b,tol)
x0=a; x1=b
e=1;
it=0;
while ( e>tol)
k=k+1;
x=x1-f(x1)(x1-x0)/(f(x1)-f(x0);
e=abs(x-x1);
x1=x;
x0=x1;
end
```

Pregunta 3

a)



Intersecciones (1,1) y (-0.6,0.6)

$$I = \int_{-0.6}^{1} \sqrt{1 - \frac{(x-1)^2}{4}} - |x| \, dx$$

b)

h=0.1
I=h/3*(f(-0.6)+4*f(-0.5)+2*f(-0.4)+ 4*f(-0.3)+2*f(-0.2)+ 4*f(-0.1)+2*f(0)+ 4*f(0.1)+2*f(0.2)+ 4*f(0.3)+2*f(0.4)+ 4*f(0.5)+2*f(0.6)+ 4*f(0.7)+2*f(0.8)+ 4*f(0.9)+f(1))
I=0.727293
Ie=0.727295
Err=0.000002
c)

x=0.8*t+0.2

$$I = \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{1 - \frac{(0.8t-0.8)^2}{4}} - |0.8t+0.2| \right) 0.8 \, dt$$

$$I = 5/9 * F(-\sqrt{3/5}) + 8/9 * F(0) + 5/9 * F(\sqrt{3/5})$$

I=0.714383
Err=0.012913
d)

```
f=inline('sqrt(1-(x-1).^2/4)-abs(x)')
a=input('a=')
b=input('b=')
n=input('Ingrese numero de particiones múltiplo de 3, N=')
if rem(n,3)==0
  h=(b-a)/n
  x=a:h:b
  y=f(x)
I=3*h/8*(y(1)+3*sum(y(2:3:n-1))+3*sum(y(3:3:n))+2*sum(y(4:3:n-2))+y(n+1))
else
  disp('Lo siento, N debe ser multiplo de 3!!')
end
```

Pregunta 4

Solución:

(a)

$x(t)$: cantidad de medicamentos en el órgano en el tiempo t.

$$x'(t) = 3 \times 0{,}2 - \frac{2}{125+t}x(t) = 0{,}6 - \frac{2}{125+t}x(t)$$

$$x(0) = 0$$

(b)

Por Euler:

$$f(t,x) = 0,6 - \frac{2}{125+t}x(t)$$

$$x_{i+1} = x_i + hf(t_i, x_i)$$

$$x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0) = 0 + 1 \times f(0,0) = 0,6$$

$$x_2 = x_1 + hf(t_1, x_1) = 0,6 + 1 \times f(1, 0,6) = 0,6 + \left(0,6 - \frac{2}{125+1} \times 0,6\right) = 1,1905$$

(c)

```
function []=eulergraf(f,fex,a,b,h,y0)
%y'=f(t,y);   a<=t<=b
%y(a)=y0
%h: tamaño de paso
%fex: solución exacta
x=[a:h:b];
n=length(x);
z=[x(1) y0 fex(x(1))];
for k=1:n-1
    y1=y0+h*f(x(k),y0);
    z=[z;x(k+1) y1 fex(x(k+1))];
    y0=y1;
end
plot(z(:,1),z(:,2),z(:,1),z(:,3))
grid on
```