UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA — P.A. 2016-2
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA — 16/12/2016
DACIBAHCC

EXAMEN SUSTITUTORIO DE METODOS NUMERICOS (MB536)

- **DURACION: 110 MINUTOS**
- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO A4**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**
- **PROHIBIDO PORTAR CELULARES U OTROS EQUIPOS DE COMUNICACIÓN ELECTRÓNICA**

Problema 1

Dado el siguiente circuito

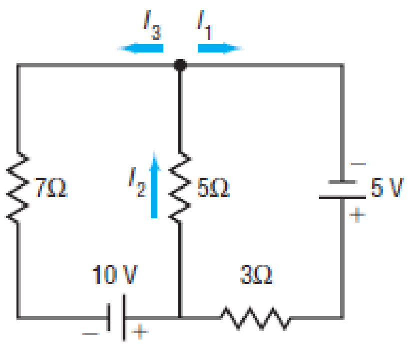


Figura 1 Circuito

a) **(1.0 pto)** Modele el sistema de ecuaciones que permita encontrar I1, I2 y I3.
b) **(1.0 pto)** Resuelva el sistema lineal Ax=b con ayuda del método de Eliminación Gaussiana, para encontrar la corriente I3.
c) **(1.0 pto)** Sabiendo que el método de Jacobi es convergente, determine la fórmula de iteración del método para resolver el sistema, indicando la matriz de iteración Tj y el vector de términos independientes Cj.
d) **(1.0 pto)** Realice 02 iteraciones, partiendo de un vector nulo.
e) **(1.0 pto)** Implemente un script en Matlab que verifique que el método de Jacobi es convergente y resuelva la parte (d).

Problema 2

Una partícula se desplaza con el siguiente modelo matemático:
$x(t) = 5 + t^2 + 0.1t^3$, donde x es la posición en metros y t es el tiempo en segundos. Se desea determinar en qué instante de tiempo la partícula alcanza los 10 m.

a) **(1.5 ptos)** Verifique la convergencia del método del punto fijo para hallar t, si la iteración empieza con t=1 y además se considera: $t = g(t) = t - 5 + t^2 + 0.1t^3$
b) **(3 ptos)** Determine t en la tercera iteración, usando el método de Newton-Raphson y partiendo de t=1.
c) **(0.5 pto)** Implemente una función en Matlab que permita hallar el número de iteraciones necesarias para alcanzar un error, usando el método de la bisección y partiendo del intervalo [1,3]. Usar la siguiente cabecera: function iteraciones=calcula(error)

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA — P.A. 2016-2
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA — 16/12/2016
DACIBAHCC

Problema 3

Para Obtener la información acerca de la conducta dinámica del soporte de carga de una estructura, Ver Figura 2, se le somete a un proceso denominado shaker (excitador de vibraciones) el cual excita de forma impulsiva las vibraciones a través de sensores de aceleración.

Los siguientes valores del ángulo de deflexión φ_i son medidos en los tiempos t_i.

φi[m]	ti[s]
0.39	2
-0.56	5
-0.05	6

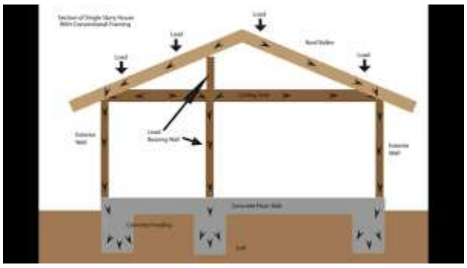


Figura 2 Soporte de carga de una Estructura – usando vibraciones

Los datos de medición han de ser aproximados por la siguiente función de regresión lineal:

$$\varphi(t_i, x_1, x_2) = x_1 \sin(\omega_1 t_i) + x_2 \cos(\omega_2 t_i)$$

Con $\omega_1 = 1Hz$ y $\omega_2 = 2Hz$.

a) **(2.0 ptos)** Determinar las amplitudes x_1 y x_2 utilizando el método de los mínimos cuadrados, y evalué el ángulo $\varphi(t=3)$.
b) **(1.0 pto)** Determine si la regresión es adecuada usando el coeficiente de Regresión.
c) **(1.0 pto)** Construya el polinomio de grado 1 de Lagrange e interpole para t =3. Comente su respuesta con respecto al valor obtenido por regresión. ¿Cuál de los dos métodos es mejor? Justifique.
d) **(1.0 pto)** Determine las amplitudes x1 y x2 de la regresión lineal, usando un programa escrito en MATLAB.

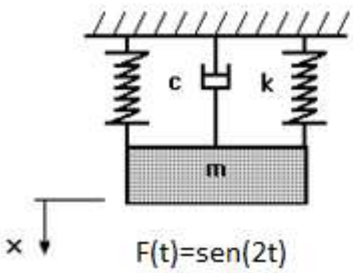
Problema 4

Considere una ecuación diferencial de segundo orden de un sistema de masa y resorte vibratorio, sometido a una fuerza externa F(t):

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = sen(2t)$$

Si las condiciones iniciales son x(0) =1 y x'(0) =0 y m=2 kg, c=3 N-s/m y k=5 N/m:

a) (**0.5 pts**) Reducir la ecuación diferencial de segundo orden a un sistema de primer orden
b) (**3.0 pts**) Mediante Euler (h=0.2 seg) determine el tiempo necesario para que el bloque pase por x=0 m.
c) (**1.5 pts**) Escriba un programa en MATLAB para resolver específicamente la parte b) mediante Runge-Kutta de orden 4, con h=0.01 seg.



Los Profesores

Solucionario problema 1:

(a)

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0$$
$$3I_1 + 5I_2 = 5$$
$$5I_2 + 7I_3 = 10$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 7 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -3 & 5 \\ 0 & 5 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{71}{8} & \frac{55}{8} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{71}{8} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ \frac{55}{8} \end{pmatrix} \to I_3 = 0.7746$$

(c) $T_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{7} & 0 \end{pmatrix} \to$

$$x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{7} & 0 \end{pmatrix} x^{(k)} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{10}{7} \end{pmatrix}$$

d) $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$x^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{7} & 0 \end{pmatrix} x^{(k)} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{10}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{10}{7} \end{pmatrix}$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{7} & 0 \end{pmatrix} x^{(2)} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{10}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/7 \\ 1 \\ \frac{5}{7} \end{pmatrix}$$

```
(e)
A=[1 -1 1;3 5 0;0 5 7], b=[0 5 10]', x0=[0 0 0]'
D=diag(diag(A)), L=-tril(A,-1), U=-triu(A,1)
Tj=inv(D)*(L+U)
cj=inv(D)*b
Rho=max(abs(eig(Tj)))  %Para verificar si es convergente
if Rho<1
   disp('Habrá convergencia!!')
   x1=Tj*x0+cj
   x2=Tj*x1+cj
else
   disp('Habrá divergencia!!')
end
```

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA P.A. 2016-2
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA 16/12/2016
DACIBAHCC

Solucionario problema 2

a) $10 = 5 + t^2 + 0.1 * t^3$

$$t = g(t) = t - 5 + t^2 + 0.1 * t^3$$

$$g'(t) = 1 + 2t \quad + 0.3 * t^2$$

$$g'(1) = 3.3 > 1$$

Por lo tanto no converge.

b) Hallando la función f y su derivada

$$10 = 5 + t^2 + 0.1 * t^3$$

$$f(t) = -5 + t^2 + 0.1 * t^3$$

$$f'(t) = 2t + 0.3t^2$$

Usando la fórmula de NR

$$t = t - \frac{f(t)}{f'(t)}$$

Iniciando t=1
Primera iteración t=2.6957
Segunda iteración t= 2.1376
Tercera iteración t= 2.0409

c) Usando la fórmula

$$\varepsilon_a^{\ k} = \frac{b-a}{2^k}$$

function iteraciones=calcula(error)
iteraciones=ceil(log2(2/error))

Solucionario Problema 3

a)

Usando la ecuación sobred-eterminada $:Cx = f$

Donde:

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \sin(\omega_1 t_1) & \cos(\omega_2 t_1) \\ \sin(\omega_1 t_2) & \cos(\omega_2 t_2) \\ \sin(\omega_1 t_3) & \cos(\omega_2 t_3) \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

La solución al problema de regresión se da resolviendo la ecuación normal:

$$\boldsymbol{C}^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}^T \boldsymbol{f}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0.9093 & -0.6536 \\ -0.9589 & -0.8391 \\ -0.2794 & 0.8439 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C}^T \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1.8244 & -0.0255 \\ -0.0255 & 1.8434 \end{bmatrix}, \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} 0.39 \\ -0.56 \\ -0.05 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{C}^T \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} 0.9056 \\ 0.1728 \end{bmatrix}$$

Solución de la ecuación normal: $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0.4978 \\ 0.1006 \end{bmatrix}$

$\varphi(3)=0.1669$

b) Factor de regresión: $R^2 = \frac{\Sigma(\hat{\varphi}_i - \bar{\varphi})^2}{\Sigma(\varphi_i - \bar{\varphi})^2} = 0.997$

c) Polinomio de Lagrange de grado 1:

$$P_1(t) = 0.39\frac{(t-5)}{(2-5)} - 0.56\frac{(t-2)}{(5-2)} = 0.13(5-t) + 0.1867(2-t)$$

$$P_1(3) = 0.0733$$

Es mejor la regresión ya que el error de interpolación es grande $e_1(3)= 0.41$ que corresponde a un 121% que es absurdo.

d)

```
t=[ 2 5 6]
y=[0.3900   -0.5600   -0.0500]
C=[sin(t') cos(2*t')];
M=C'*C;
f=y';
x=M\(C'*f)
```

Solucionario Problema 4

Solución

a)

$$2\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+5x=sen(2t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{sen(2t)}{2}-\frac{3}{2}\frac{dx}{dt}-\frac{5}{2}x$$

$$Luego:$$

$$\frac{dx}{dt}=v \quad x(0)=1$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{sen(2t)}{2}-\frac{3}{2}v-\frac{5}{2}x \quad v(0)=0$$

b)

$$Euler:$$

$$h=0.1 \quad t_0=0 \quad x_0=1 \quad v_0=0$$

$$Para \quad n=0,1,2\cdots \; hasta \; x<0$$

$$t_{N+1}=t_N+h$$

$$x_{N+1}=x_N+h*v_N$$

$$v_{N+1}=v_N+h*\left(\frac{sen(2t_N)}{2}-\frac{3}{2}v_N-\frac{5}{2}x_N\right)$$

$$Fin$$

T	X	V
0	1.0000	0
0.2000	1.0000	-0.5000
0.4000	0.9000	-0.8111
0.6000	0.7378	-0.9460
0.8000	0.5486	-0.9379
1.0000	0.3610	-0.8309
1.2000	0.1948	-0.6712
1.4000	0.0606	-0.4997
1.6000	-0.0393	-0.3466

Interpolando linealmente, x=0 ocurre cuando t=1.52 seg, aproximadamente

C)

```
% RK4
clear all
t(1)=0
x(1)=1
v(1)=0
f=inline('v','t','x','v')
g=inline('sin(2*t)/2-3*v/2-5/2*x','t','x','v')
```

```
h=0.01
for i=1:200
   t(i+1)=t(i)+h;
   k1=h*f(t(i),x(i),v(i));
   l1=h*g(t(i),x(i),v(i));
   k2=h*f(t(i)+h/2,x(i)+k1/2,v(i)+l1/2);
   l2=h*g(t(i)+h/2,x(i)+k1/2,v(i)+l1/2);
   k3=h*f(t(i)+h/2,x(i)+k2/2,v(i)+l2/2);
   l3=h*g(t(i)+h/2,x(i)+k2/2,v(i)+l2/2);
   k4=h*f(t(i)+h,x(i)+k2,v(i)+l2);
   l4=h*g(t(i)+h,x(i)+k2,v(i)+l2);
   x(i+1)=x(i)+1/6*(k1+2*k2+2*k3+k4);
   v(i+1)=v(i)+1/6*(l1+2*l2+2*l3+l4);
   if x(i+1)<0
       break
   end
end
disp([t' x' v'])
disp(t(i+1))
```