UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA — P.A. 2016-2
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA — 02/12/2016
DACIBAHCC

EXAMEN FINAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

- **DURACION: 110 MINUTOS**
- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO A4**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**
- **PROHIBIDO PORTAR CELULARES U OTROS EQUIPOS DE COMUNICACIÓN ELECTRÓNICA**

Problema 1

La figura muestra una placa de metal *OAB* con la cual se quiere fabricar una pieza trapezoidal *CDEF*.

Si el segmento OB pertenece a la recta y = 2x, el arco BA pertenece a la parábola $y = -\frac{x^2}{4} - x + 3$, y las abscisas de C y D son u y v , respectivamente. Se pide:

a) **(1.0 pto)** Obtener el sistema no lineal que permita resolver el problema de maximizar el área $A(u,v)$ de la región trapezoideal.

b) **(2.0 ptos)** Considerar el punto inicial $(u_0, v_0) = (0.5, 1.5)$ y obtener la aproximación al cabo de dos (02) iteraciones usando el método de Newton Raphson. Estimar el área máxima.

c) (**1.0 pto**)¿En este caso el método de Newton Raphson es rápido o lento? ¿Cuando Falla el método de Newton Raphson? Justifique.

d) **(1.0 pto)** Elabore la función en MATLAB con la siguiente cabecera: function [F,JF, X]=ff(Z) y corra en línea de comandos las dos iteraciones. Esta función le permite leer un punto de inicio desde la ventana de comandos, Z , luego llamar a la función ff.m y calcular el valor funcional F, la matriz de Jacobianos JF, y el nuevo valor corregido por el algoritmo Newton Raphson, X. Así podría realizar en línea las dos iteraciones.

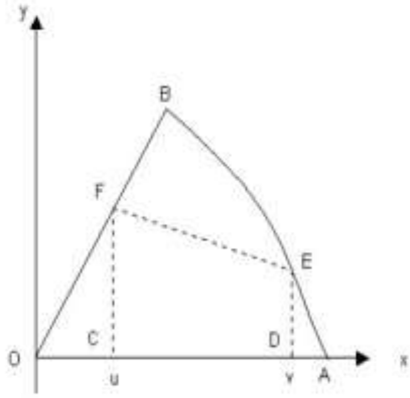

Figura 1 Aréa trapezoidal a minimizar

Problema 2

La aceleración de una astronave lanzada verticalmente viene dada (una vez parados los motores) por:

$$a = -g\left(\frac{R}{R+h}\right)^2$$

donde g es la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre (9.81 m/s^2), R es el radio de la tierra (6370 Km) y h es la altura de la astronave sobre la superficie terrestre. Se desea determinar la velocidad a una altura de 100 Km, si se paran los motores a una altura de 32 Km y su velocidad a esa altura es de 19300 Km/h.

a) **(0.5 ptos)** Demostrar que la siguiente relación gobierna el movimiento de la astronave:

$$I = \int_{ho}^{hf} a\; dh = \frac{v_f^2 - v_0^2}{2}$$

b) **(2.5 ptos)** Aproxime I mediante la cuadratura de Gauss (N=1 y N=2)

c) **(1.0 pto)** Muestre el error para b), aproxime la velocidad final en Km/h y comente sus resultados

d) **(1.0 pto)** Escriba un programa en MATLAB para resolver este problema

Sug.- Trabajar en unidades de Km y horas

Problema 3

Un fabricante de refrigeradoras desea saber la densidad del agua, dada cierta temperatura. Sin embargo, solo tiene datos sobre temperaturas distintas a las de interés, como la siguiente tabla:

T[°C]	Densidad [kg/m^3]
18	998.5
20	998.2
22	997.7

Le pide su ayuda, porque no sabe qué hacer y necesita calcular la densidad cuando T=20.256 ^oC.

a) **(1.5 ptos)** Calcule el polinomio de interpolación por el método de las diferencias divididas.

b) **(1 pto)** Calcule la densidad para T=20.256 ^oC.

c) **(1 pto)** Hallar el error al aproximar la densidad para T=19 ^oC utilizando un polinomio de primer grado.

d) **(1.5 ptos)** Implementar un script en MATLAB que implemente la tabla de las diferencias divididas.

Problema 4

Un recipiente que contiene agua caliente se enfría en una habitación a 15° C. Inicialmente la temperatura del agua estaba a 80° C, en el primer minuto el agua alcanza una temperatura de 78° C, si se sabe que el modelo matemático a considerar para el enfriamiento es: $\frac{dT}{dt} = K(T - Ta)$, donde K es la constante de enfriamiento, Ta es la temperatura ambiente y t es el tiempo en minutos.

a) **(1 pto)** Calcule K usando solamente el método de Euler progresivo, con un paso de 1 minuto.

b) **(3 ptos)** Calcule la temperatura en el tercer minuto usando el método de Taylor de orden 2, con un paso de 1 minuto, use el K obtenido del ítem a).

c) **(1 pto)** Desarrolle un programa en MATLAB, que permita calcular la temperatura después de media hora, mediante el método de Runge Kutta de orden 4, usando un paso de 0.01minuto y el K del ítem a).

Los Profesores

Solucionario

Solución 1

a) $Area = A(u,v) = (v-u)\left[u - \frac{v^2}{8} - \frac{v}{2} + \frac{3}{2}\right]$

Área Máxima

$$\frac{\partial A}{\partial u} = 0 \Rightarrow -4u + \frac{v^2}{4} + 3v - 3 = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial v} = 0 \Rightarrow 3u - \frac{3v^2}{4} - 2v + \frac{uv}{2} + 3 = 0$$

El sistema lineal a resolver es:

$$f_1(u,v) = -4u + \frac{v^2}{4} + 3v - 3 = 0$$

$$f_2(u,v) = 3u - \frac{3v^2}{4} - 2v + \frac{uv}{2} + 3 = 0$$

b)

Tenemos:

$$F(u,v) = \begin{bmatrix} -4u + \frac{v^2}{4} + 3v - 3 \\ 3u - \frac{3v^2}{4} - 2v + \frac{uv}{2} + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matriz Jacobiana está dada por:

$$J_F(u,v) = \begin{bmatrix} -4 & \frac{v}{2} + 3 \\ 3 + \frac{v}{2} & -\frac{3v}{2} - 2 + \frac{u}{2} \end{bmatrix}$$

Algoritmo de Newton Raphson :

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - J_F(X^{(k)})^{-1} F(X^{(k)})$$

Iteración 1: u_o =0.5 , v_o =1.5, ==> $X^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$

$$F(u_0,v_0) = \begin{bmatrix} -4u_o + \frac{v^2_o}{4} + 3v_o - 3 \\ 3u_o - \frac{3v^2_o}{4} - 2v_o + \frac{u_o v_o}{2} + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0625 \\ 0.1875 \end{bmatrix}$$

$$J_F(u_0,v_0) = \begin{bmatrix} -4 & \frac{v_o}{2} + 3 \\ 3 + \frac{v_o}{2} & -\frac{3v_o}{2} - 2 + \frac{u_o}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3.75 \\ 3.75 & -4 \end{bmatrix}$$

Algoritmo de Newton Raphson:

$$X^{(1)} = X^{(0)} - \begin{bmatrix} -4 & 3.75 \\ 3.75 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.0625 \\ 0.1875 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9919 \\ 2.0081 \end{bmatrix}$$

Area ≈0.9997

Iteración 2:

$$X^{(2)} = X^{(1)} - \begin{bmatrix} -4 & 4.004 \\ 4.004 & -4.5161 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.0645 \\ 0.0686 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.001 \\ 2.0001 \end{bmatrix}$$

Area ≈1.0000

c) **En este caso la convergencia de NR es rápido converge en dos iteraciones casi todas las cifras significativas. El método de Newton Raphson falla cuando el punto inicial está lejos de la raíz buscada o cerca de un punto crítico (máximo, mínimo) o punto de inflexión.**

d)

```
function [F,JF,X]=ff(Z)
u=Z(1);v=Z(2);
F=[ -4*u+v*v/4+3*v-3;  3*u-3/4*v*v-2*v+3+u*v/2];
JF=[-4       v/2+3;  3+v/2   -3*v/2-2+u/2];
 X=[u;v]-JF\F;
```

```
>> Z=[0.5  1.5]'; [F,JF,X]=ff(Z);
>> [F,JF,X]=ff(X);
```

Solución 2

a) Integrando la ecuación de MRU: a dh=v dv

$$I = \int_{ho}^{hf} a\ dh = \int_{vo}^{vf} v\ dv = \frac{v_f^2 - v_0^2}{2}$$

b)

$$R = 6370\ Km$$

$$g = 9.81 * 3600^2 / 1000\ Km/h^2$$

$$I = \int_{32}^{100} -g\left(\frac{R}{R+h}\right)^2 dh = \int_{19300}^{vf} v\ dv$$

$$h = 34 * x + 66$$

$$g = 9.81 * 3600^2 / 1000\ Km/h^2$$

$$I = \int_{-1}^{1} -34g\left(\frac{R}{R+34*x+66}\right)^2 dx$$

$$I_1 = 2F(0) = \text{-}8.468952858829742\text{e}+006$$

$$I_2 = F\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \text{-}8.469189212424595\text{e}+006$$

c)

$$\text{Ie} = \text{-}8.469189215356290\text{e}+006$$

$$\text{e1} = 2.363565265480429\text{e}+002$$

$$\text{e2} = 0.002931695431471$$

$$\text{v}_\text{f} = \sqrt{2 * I_2 + 19300^2} = 18856\ Km/h$$

d)

```
g=9.81*3600^2/1000
R=6370
syms h x
a=-g*R^2/(R+h)^2
I=int(a,32,100)
Ie=double(I)
F=-34*g*R^2/(R+34*x+66)^2
I1=2*subs(F,0)
I2=subs(F,-1/sqrt(3))+subs(F,1/sqrt(3))
E1=abs(I1-Ie)
E2=abs(I2-Ie)
V=sqrt(2*I2+19300^2)
```

Solución 3

a) Hallando la tabla de las diferencias divididas

t ºC	$P(t)$		
18	998.5		
20	998.2	-0.15	
22	997.7	-0.25	-0.025

$$P_2(t) = 998.5 - 0.15(t-18) - 0.025(t-18)(t-20)$$

$$\boxed{P_2(t) = -0.025t^2 + 0.8t + 992.2}\ [\text{Kg/m}^3]$$

b) Densidad para T=20,256 ^{o}C

$$P(20.256) = -0.025(20.256)^2 + 0.8 * 20.256 + 992.2 = 998.147\ [\frac{kg}{m^3}]$$

c) Error para T=19 ^{o}C

$$e_1(19) = -0{,}025(19-18)(19-20) = 0{,}025$$

d)

```
x=[18 20 22]
y=[998.5 998.2 997.7]
n=length(x);
D=zeros(n);
D(:,1)=y';
for j=2:n
    for i=1:n-j+1
        D(i,j)=(D(i,j-1)-D(i+1,j-1))/(x(i)-x(i+j-1));
    end
end
disp('Tabla de la diferencia dividida:')
D
```

Solucion 4

a) f=T'=K(T-15)   Ts=T+h*f(t,T)

h=1   T0=80 T1=78

78=80+K(80-15)   65K=-2   K=-2/65=-0.0308

b) f'=T''=KT'=K*K(T-15)

h=1 T0=80

Ts=T+h*f(t,T)+h^2*f'(t,p)/2

T1= 80+(-2/65)*(80-15) +(-2/65)^2*(80-15)/2=78.0308

T2=78.0308+(-2/65)*(78.0308-15) +(-2/65)^2*(78.0308-15)/2=76.1212

T3=76.1212+(-2/65)*(76.1212-15) +(-2/65)^2*(76.1212-15)/2=74.2695

T3=74.2695

C)

```
f=inline('(-2/65)*(y-15)','x','y');
xi=0;
yi=80;
h=0.01;y=yi;x=xi;n=30*100;
for i=2:n
    x(i)=x(i-1)+h;
    k1=h*f(x(i-1),y(i-1));
    k2=h*f(x(i-1)+h/2,y(i-1)+k1/2);
    k3=h*f(x(i-1)+h/2,y(i-1)+k2/2);
    k4=h*f(x(i-1)+h,y(i-1)+k3);
    y(i)=y(i-1)+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
end
disp(y(i))
```