UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA — P.A. 2015-3
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA — 05/02/2015
DACIBAHCC

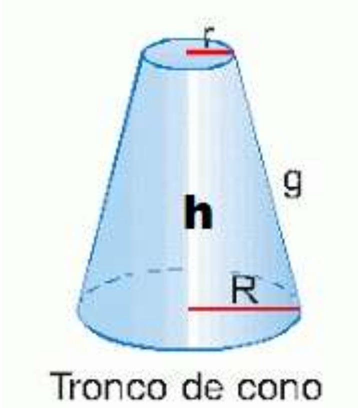
**EXAMEN PARCIAL DE METODOS NUMERICOS (MB536A)**

- **DURACION: 110 MINUTOS**
- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO A4**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**

**Problema 1**

a) **(2.5 Pts)** Un cono truncado de radio mayor **R**, radio menor **r** y altura **h** cuya área lateral se puede calcular con la fórmula: $A = \pi\, g\,(R + r)$

Si r=2 m, R=4 m y h=6.65 m. Con que precisión debe medirse h, si el área obtenida tiene un precisión de 10%, los radios fueron medidos con una exactitud de 3 % y $\pi$=3.142 con sus 3 cifras decimales exactas.




b) **(2.5 Pts)** Sea un sistema basado en la norma IEEE-754 con las siguientes características: Almacenamiento de 18 bits: signo: 1 bit, exponente: 5 bits, mantisa : 12 bits, determine el valor binario y decimal de:

**i)** El menor número positivo normalizado

**ii)** El menor número negativo subnormal

**iii)** El valor del Área lateral de la pregunta a) redondeado a 2 decimales

**Problema 2**

Sea el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 21 & 6a+8 \\ 4 & 13 & 44 & 10a+51 \\ 9 & 29 & 95 & 22a+116 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8a-3 \\ 43a-6 \\ 91a-47 \\ 197a-107 \end{bmatrix}$$

a) **(1.0 Pts)** Para qué valores de ***a*** el sistema presenta solución única?

b) **(2.0 Pts)** Obtener la factorización de Crout.

c) **(2.0 Pts)** Resolver los sistemas triangulares obtenidos en b)

**Problema 3**

Sea el sistema: $\begin{bmatrix} 2a & b & 0 \\ b & 3a & b \\ 0 & b & 5a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ a+b \end{bmatrix}$

a) **(1.5 Pts)** ¿Qué relación debe cumplir a y b para obtener todos los valores de convergencia del método de Jacobi?

b) **(2.0 Pts)** Realice iteraciones del método de Jacobi, partiendo de un vector inicial nulo, con ***a=4*** y ***b=1***, hasta alcanzar una Tolerancia de 0.001, use la norma infinita para estimar el error. Realice por lo menos dos iteraciones paso a paso. Comente sus resultados acerca de la velocidad de convergencia

c) **(1.5 Pto)** Escriba una función en MATLAB para resolver c) con parámetros de entrada ***a***, ***b*** y la tolerancia ***TOL***, y parámetros de salida el vector solución ***x*** y el error ***err***.

**Problema 4**

Una partícula se mueve de acuerdo a una trayectoria gobernada por una función del tiempo por medio de:

$$X(t) = \cos(t^3)-\sin(2t^2) \qquad Y(t) = \cos(t) \qquad Z(t) = e^{-t} + 4t^3 - 5$$

Donde: t en segundos y las posiciones en metros.

Se desea determinar el tiempo en el que la partícula atraviesa un plano paralelo que se ubica por encima del plano XY separado a un metro:

a) **(1 Pto)** Determine la ecuación a resolver y localice las raíces.

b) (**1 Pto)** Con un intervalo de longitud unitaria realice 03 iteraciones de bisección.

c) **(1.5 Pto)** Encuentre el algoritmo convergente de aproximaciones sucesivas sin realizar iteraciones aplicando un criterio de convergencia adecuado, pruebe por lo menos 2 alternativas. Luego realice 5 iteraciones a partir de la última aproximación obtenida en b) indicando el error.

d) **(1.5 Pto)** Escriba un programa MATLAB para resolver c) con una precisión de $1e^{-7}$.

**Los Profesores**

**Solución 1**

a)

$A=\pi\sqrt{h^2+(R-r)^2}\,(R+r)=130.9129$

$\xi_A=13.0913$

$\xi_r=0.06$

$\xi_R=0.12$

$\xi_\pi=0.0005$

$\xi_A=\left|\frac{\partial A}{\partial \pi}\right|\xi_\pi+\left|\frac{\partial A}{\partial h}\right|\xi_h+\left|\frac{\partial A}{\partial r}\right|\xi_r+\left|\frac{\partial A}{\partial R}\right|\xi_R$

$\frac{\partial A}{\partial \pi}=41.6655$

$\frac{\partial A}{\partial h}=18.0532$

$\frac{\partial A}{\partial r}=16.3893$

$\frac{\partial A}{\partial R}=27.2483$

$\xi_h=0.4884$

b)

Exceso=$2^{5-1}$-1=15

i)

0 00001 000000000000

X=$(-1)^0$(1.000000000000)$2^{1-15}$=$2^{-14}$=6.1035e-005

ii)

1 00000 111111111111

X=$(-1)^1$(0. 111111111111)$2^{-14}$= 6.1020e-005

iii)

x=130.91=10000010.11101=1.000001011101x$2^7$=

Ei-15=7=010110

0 10110 000001011101

130.0.9063

**Solución 2**

**a)**

Det(A)=315, como el determinante es diferente de 0, la matriz en invertible y el sistema presenta solución única, para cualquier *a* real:

**b)**

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 7 & 21 & 6a+8\\ 4 & 13 & 44 & 10a+51\\ 9 & 29 & 95 & 22a+116\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 0\\ 4 & 5 & 7 & 0\\ 9 & 11 & 13 & 15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 5 & 2a\\ 0 & 0 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

**c)**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 7 & 0 \\ 9 & 11 & 13 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8a-3 \\ 43a-6 \\ 91a-47 \\ 197a-107 \end{bmatrix} ==> \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8a-3 \\ 9a \\ 2a-5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 2a \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8a-3 \\ 9a \\ 2a-5 \\ -1 \end{bmatrix} ==> \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 2a \\ -1 \end{bmatrix}$$

## Solución 3

**a)**

$$A = \begin{bmatrix} 2a & b & 0 \\ b & 3a & b \\ 0 & b & 5a \end{bmatrix}$$

$$Tj = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-b}{2a} & 0 \\ \frac{-b}{3a} & 0 & \frac{-b}{3a} \\ 0 & \frac{-b}{5a} & 0 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det(Tj - \lambda\, I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & \frac{-b}{2a} & 0 \\ \frac{-b}{3a} & -\lambda & \frac{-b}{3a} \\ 0 & \frac{-b}{5a} & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + \frac{7b^2\lambda}{30a^2}$$

$$\rho(Tj) = \sqrt{\frac{7}{30}}\,\frac{b}{a} < 1$$

$$-\sqrt{\frac{30}{7}} < \frac{b}{a} < \sqrt{\frac{30}{7}}$$

**b)**

$$X^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Tj = \begin{bmatrix} 0 & -0.125 & 0 \\ -0.0833 & 0 & -0.0833 \\ 0 & -0.05 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Cj = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.0833 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

| x | y | z | err |
|---|---|---|---|
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | --------- |
| 0.5000 | 0.0833 | 0.2500 | 0.5000 |
| 0.4896 | 0.0208 | 0.2458 | 0.0625 |
| 0.4974 | 0.0220 | 0.2490 | 0.0078 |
| 0.4972 | 0.0211 | 0.2489 | 9.1146e-004 |

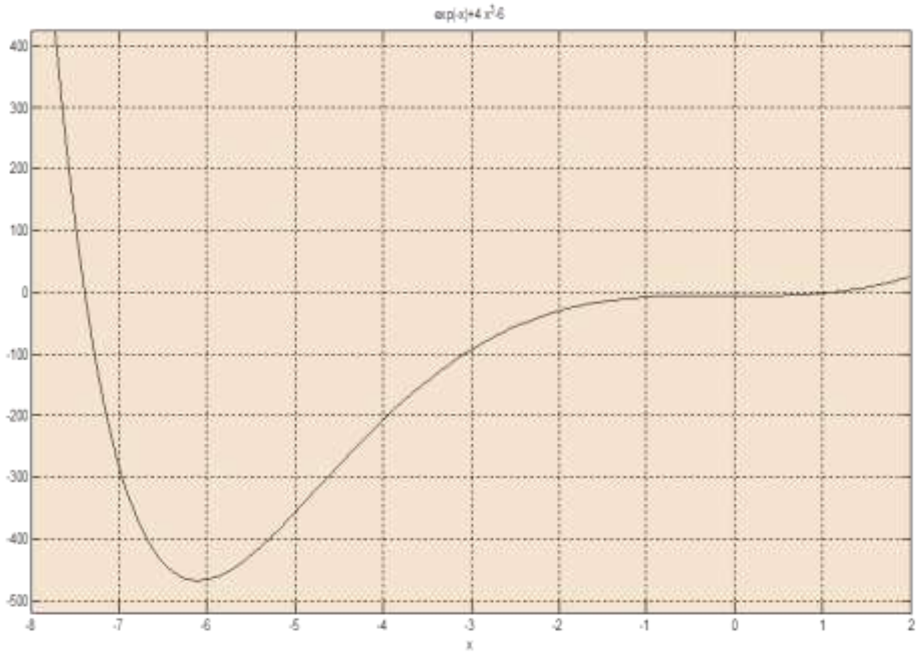
La convergencia es bastante rápida dado que el radio espectral pequeño (0.12)

**c)**

```
function [X,err]=jacobo(a,b,TOL)
A=[2*a b 0;b 3*a b;0 b 5*a];
b=[a; b; a+b];
D=diag(diag(A));
L=D-tril(A);
U=D-triu(A);
Tj=inv(D)*(L+U)
Cj=inv(D)*b
X=[0;0;0];
for i=1:1000
   X1=Tj*X+Cj
   err=norm(X1-X,Inf)
   X=X1;
   if err<TOL
       break
   end
end
```

**Solución 4**
**a)**

$Z(t) = e^{-t} + 4t^3 - 5 = 1$




Existe 2 raíces entre [-8,-7] y [1,2]

**b)**
Bisección

| a | c | b | err |
|---|---|---|---|
| 1 | 1.5 | 2 | 0.5 |
| 1 | 1.25 | 1.5 | 0.25 |
| 1 | 1.125 | 1.25 | 0.125 |

**c)**
$e^{-t} + 4t^3 - 5 = 1$
Sean las alternativas:

$$g_1'(t) = \left(\frac{6 - e^{-t}}{4}\right)^{1/3}$$

$$g_2'(t) = \left(\frac{6 - e^{-t}}{4t}\right)^{1/2}$$

tomando $t_o = 1.5$
$g_1'(1.5) = 0.0146$
$g_2'(1.5) = -0.3081$

Se requiere que $|g_1'(t)| < 1$

Las dos formas son convergentes
Se recomienda la de menor pendiente

$t_0$=1.125, valor obtenido en la Bisección:

$t_{n+1}$=((6-exp(-$t_n$))/4)^(1/3)

| **tn** | **Err** |
|---|---|
| **1.125000000000000** | **------** |
| **1.123683895175608** | **0.001316104824392** |
| **1.123655676517610** | **0.000028218657998** |
| **1.123655071057889** | **0.000000605459721** |
| **1.123655058066947** | **0.000000012990942** |
| **1.123655057788209** | **0.000000000278738** |

La convergencia es bastante rápida!!

**d)**

```
clc
clear all
syms t
g1=((6-exp(-t))/4)^(1/3)
g2=((6-exp(-t))/(4*t))^(1/2)
dg1=diff(g1)
dg2=diff(g2)
m1=subs(dg1,1.5)
m2=subs(dg2,1.5)
t0=1.125
acum=[t0 NaN];
for i=1:5
    t1=subs(g1,t0);
    err=abs(t1-t0);
    acum=[acum; t1 err];
    t0=t1;
end
acum
```