UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA **P.A. 2015-3**
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA **01/03/2016**
DACIBAHCC

EXAMEN FINAL DE METODOS NUMERICOS (MB536A)

- **DURACION: 110 MINUTOS**
- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO A4**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**

Problema 1

Sea el sistema de ecuaciones no lineales:

$$x^2+2x+y^2+4y=4$$
$$x^2+2x-y-5=0$$

a) **(1.0 P)** Bosquejar a mano alzada la solución del sistema e indique valores cercanos a las raíces con una aproximación al entero más próximo.

b) **(2.0 P)** Determinar la raíz más cercana al origen de coordenadas usando 03 iteraciones del Método de Newton-Raphson para sistemas y muestre el error usando norma Infinita. Inicialice en el valor obtenido en a).

c) **(2.0 P)** Encuentre un algoritmo de punto fijo para la raíz buscada en b) verificando la condición de convergencia y luego realice 03 iteraciones. Inicialice en el valor obtenido en a). y muestre el error.

Problema 2

Se tiene los siguientes datos experimentales en un proceso térmico:

Tiempo (min) = t	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
Temperatura Media (°C)=ϴ	5	8	15	30	70	230

Se puede aproximar por una función de la forma: $\theta = a\, e^{b\, e^{t} + ct^2}$ **,** para lo cual se pide:

a) **(2.5 P)** Determine ***a, b*** y ***c*** mediante ajuste por mínimos cuadrados usando la ecuación normal.

b) **(1.5 P)** Determine el factor de regresión.

c) **(1.0 P)** Escriba un programa MATLAB para evaluar el factor de regresión de este problema.

Problema 3

Una partícula se desplaza con el siguiente modelo matemático que describe su velocidad en cada instante de tiempo: $v(t) = \dfrac{e^t sen(t)}{1+t^2}$, se desea conocer la distancia recorrida entre el instante 0 s y 3 s, para ello:

a) **(2.0 P)** Determine la distancia, usando el método de Newton-Cotes cerrado de grado 3 con 10 puntos y su respectivo error, sabiendo que el valor exacto es 2.88163727.

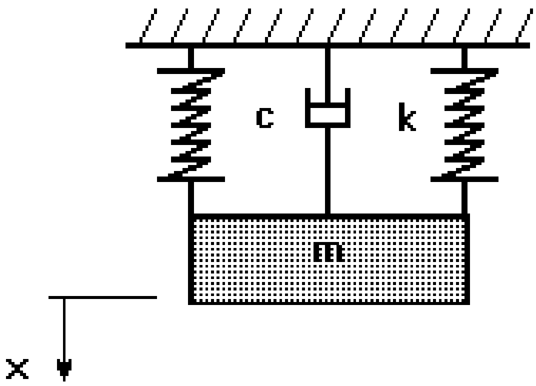
b) **(2.0 P)** Determine la distancia, usando el método de Gauss-Legendre con 4 puntos y su respectivo error.

c) **(1.0 P)** Desarrolle un script para que calcule la distancia recorrida por el método de trapecio abierto usando 3000 particiones.

Problema 4

Considere una ecuación diferencial de segundo orden de un sistema de masa y resorte vibratorio $m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=0$. Las Unidades están en el SI. Las condiciones iniciales son x(0) =5 y x'(0) =0, donde c=12 y m=4 y k=9:

a) **(2.0 P)** Estime la posición y velocidad para t=0.2, usando Taylor 2 con h=0.1



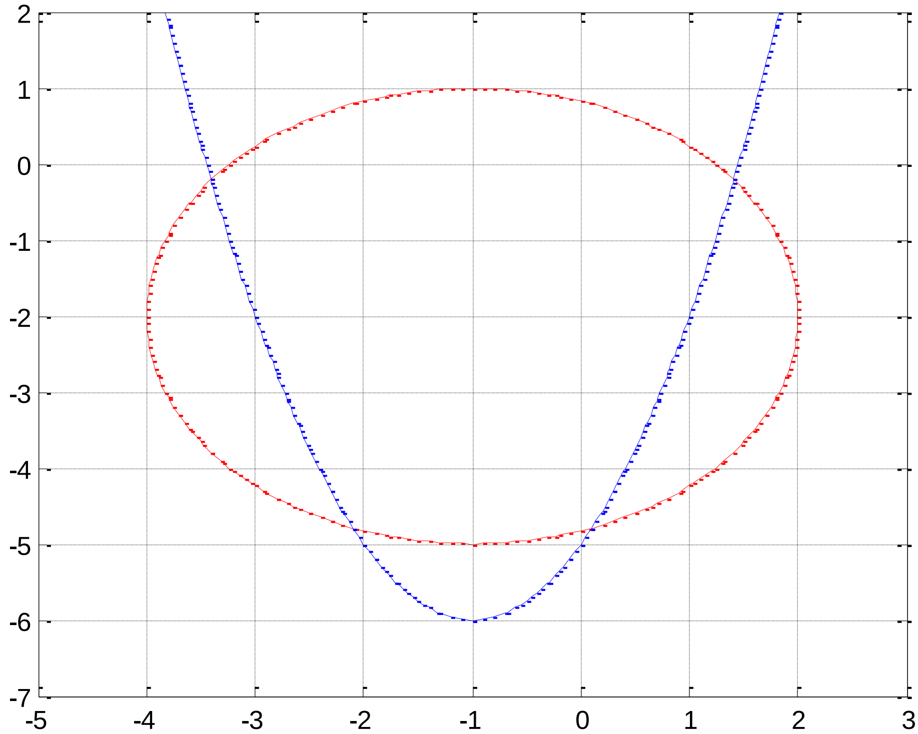
b) **(2.0 P)** Estime la posición y velocidad para t=0.2 seg, usando RK2 con h=0.1

c) **(1.0 P)** Halle la solución analítica y determine el error para a) y b) y comente sus resultados.

El profesor

Problema 1

Aproximaciones iniciales: (0,-5) (1,0) (-3,0) (-2,-5)



b) Newton-Raphson

$x_0 = 1 \quad y_{0'} = 0$

$$\begin{bmatrix} 2x+2 & 2y+4 \\ 2x+2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} x^2+y^2+2x+4y-4 \\ x^2+2x-y-5 \end{bmatrix}$$

$x_{n+1} = x_n + \Delta x$

$y_{n+1} = y_n + \Delta y$

n	Xn	Yn	Err
0	1.000000000000000	0	-----------------------
1	1.450000000000000	-0.200000000000000	0.450000000000000
2	1.406898846495120	-0.208695652173913	0.043101153504880
3	1.406509505305120	-0.208712152462668	0.000389341190000

c)Iteración de Punto Fijo:

Verificación del criterio de convergencia:

$x_0 = 1 \quad y_{0'} = 0$

$x = G_1(x, y) = \sqrt{y+6} - 1$

$y = G_2(x, y) = \sqrt{9-(x+1)^2} - 2$

$$J(x,y)=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial G_1}{\partial x} & \dfrac{\partial G_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial G_2}{\partial x} & \dfrac{\partial G_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\|J(x_0,y_0)\|_\infty = 0.8944 < 1$$

Comprobación:

$x_0 = 1 \quad y_{0'} = 0$

$$x_{n+1} = G_1(x_n, y_n) = \sqrt{y_n + 6} - 1$$

$$y_{n+1} = G_2(x_n, y_n) = \sqrt{9-(x_n+1)^2} - 2$$

1.0000	0	NaN
1.4495	0.2361	0.4495
1.4972	-0.2679	0.5040
1.3942	-0.3375	0.1030

Problema 2

a)

$$\theta = a\, e^{b\, e^t + c t^2}$$

$$Ln(\theta) = Ln(a) + b\, e^t + c\, t^2$$

Aplicando para cada punto:

$$\begin{bmatrix} 1 & e^{t_1} & t_1^{\,2} \\ 1 & e^{t_2} & t_2^{\,2} \\ 1 & e^{t_3} & t_3^{\,2} \\ 1 & e^{t_4} & t_4^{\,2} \\ 1 & e^{t_5} & t_5^{\,2} \\ 1 & e^{t_6} & t_6^{\,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ln(a) \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ln(\theta_1) \\ Ln(\theta_2) \\ Ln(\theta_3) \\ Ln(\theta_4) \\ Ln(\theta_5) \\ Ln(\theta_6) \end{bmatrix}$$

$$Mp = Y$$

Aplicando la Ecuación Normal:

$$M^T M p = M^T Y$$

Resolviendo:

a=0.6321
b=2.0739
c=0.2292

b)
R^2=0.9431
c)

```
x=(0:0.2:1)'
y=[5 8 15 30 70 230]'
X=x
Y=log(y)
M=[ones(6,1) exp(X) X.^2]
MM=M'*M
MY=M'*Y
p=MM\MY
a=exp(p(1))
b=p(2)
c=p(3)
ys=a*exp(b*exp(x)+c*x.*x)
plot(x,y,'d',x,ys,'*'), grid
ym=mean(y)
r2=sum((ys-ym).^2)/sum((y-ym).^2)
```

Problema 3
a)

Simpson 3/8
h=1/3
I=3*h/8*(f(0)+3*f(1/3)+ 3*f(2/3)+ 2*f(1)+ 3*f(4/3) + 3*f(5/3) +2*f(2)+ 3*f(7/3) + 3*f(8/3)+f(3))
ISimpson38 = 2.883169348514245
ESimp38 = 0.001532075459055

b)
Cuadratura de Gauss N=4
t=3/2*(x+1)
f(x)=3/2* exp(3/2*(x+1))*sin(3/2*(x+1))/(1+(3/2*(x+1))^2)
x1=-0.861136311594053
x2=-0.339981043584856
x3=+0.339981043584856
x4=+0.861136311594053
c1=0.347854845137454
c2=0.652145154862546
c3=0.652145154862546
c4=0.347854845137454
I=c1*f(x1)+c2*f(x2)+c3*f(x3)+c4*f(x4)
IGauss = 2.881695213552816
errGauss = 5.794049762553044e-005

c)
% Trapecio abierta
```
n=3000
h=(3-0)/n
t=0:h:3
f=inline('exp(t).*sin(t)./(1+t.^2)','t')
y=f(t)
I=3*h/2*(sum(y(2:3:n-1))+sum(y(3:3:n)))
```

Problema 4

a) Reemplazando:

$$4x''+12x'+9x=0$$

$$x(0)=5 \quad x'(0)=0$$

Reduciendo a primer orden:

$$x'=v \quad x(0)=5$$

$$v'=\frac{12v-9x}{4} \quad v(0)=1$$

Taylor 2 de segundo orden:

$$t_0=0 \quad x_0=5 \quad v_0=0 \quad h=0.1$$

$$t_{n+1}=t_n+h$$

$$x_{n+1}=x_n+h*v_n+\frac{h^2}{2}*\left(\frac{-12v_n-9x_n}{4}\right)$$

$$v_{n+1}=v_n+h*\left(\frac{-12v_n-9x_n}{4}\right)+\frac{h^2}{2}*\left(\frac{-12\left(\frac{-12v_n-9x_n}{4}\right)-9v_n}{4}\right)$$

t	x	v
0	5.000000000000000	0
0.100000000000000	4.943750000000000	-0.956250000000000
0.200000000000000	4.806851562500000	-1.647140625000000

b) Runge-Kutta de orden 2:

$$t_0=0$$

$$x_0=5$$

$$v_0=0$$

$$h=0.1$$

$$t_{n+1}=t_n+h$$

$$k_1=h*v_n$$

$$l_1=h*\left(\frac{-12v_n-9x_n}{4}\right)$$

$$k_2=h*(v_n+l_1)$$

$$l_2=h*\left(\frac{-12(v_n+l_1)-9(x_n+k_1)}{4}\right)$$

$$x_{n+1}=x_n+\frac{1}{2}(k_1+k_2)$$

$$v_{n+1}=v_n+\frac{1}{2}(l_1+l_2)$$

t	**x**	**v**
0	**5.000000000000000**	**0**
0.100000000000000	**4.943750000000000**	**-0.956250000000000**
0.200000000000000	**4.806851562500000**	**-1.647140625000000**

c)
Solución exacta:
X=5/exp((3*t)/2) + (15*t)/(2*exp((3*t)/2))
t = 0 0.1 0.2
x = 5 4.949070864444082 4.815318434431166
Taylor 2
X 5 4.943750000000000 4.806851562500000
RK2
X 5 4.943750000000000 4.806851562500000

Taylor y RK2 tienen la misma precisión para esta EDO