UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA P.A. 2015-2
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA 21/12/2015
DACIBHCC

EXAMEN SUSTITUTORIO DE METODOS NUMERICOS (MB536)

Nota

NOTA EN LETRAS

FIRMA DEL DOCENTE

Cod Alumno	AP. PATERNO	AP. MATERNO	NOMBRES	FIRMA
NOMBRE DEL CURSO			CODIGO DEL CURSO	SECCION

- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO Y CALCULADORA**
- **LLENAR ADECUADAMENTE LOS ESPACIOS EN BLANCO**
- **PROHIBIDO EL USO DE CELULARES U OTROS EQUIPOS DE COMUNICACION ELECTRONICA**
-
- **DURACION: 110 MINUTOS**

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA **P.A. 2015-2**
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA **21/12/2015**
DACIBHCC

Problema 1

Un dispositivo móvil de masa m_1 se desplaza sobre un plano x-y, llevando a bordo dos cuerpos de masa m_2 y m_3, respectivamente, si se sabe que su posición obedece a la siguiente función:

$$y = m_1 x^2 + m_2 x^3 + m_3 (x-1)^4$$

Además, el dispositivo se encontró en las siguientes coordenadas: (0.5,1) ; (2,20) y (4,70)

Las masas están en kg y se pide calcular lo siguiente:

1. **(0.5 pto)** Determine el sistema de ecuaciones para determinar las masas en el formato Am=b

$$A = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

2. **(1 pto)** Con respecto al tipo de sistema de ecuación, marque la respuesta correcta:
   a) No tiene solución b) Es incompatible c) Es determinado
   d) Presenta más de una solución

3. **(1 pto)** Con respecto a la convergencia de este sistema de ecuaciones, marque la respuesta correcta:
   a) Converge solo para Jacobi b) Converge para Jacobi y Gauss Seidel
   c) Converge solo para Gauss-Seidel d) No converge

4. **(2 ptos)** Determine los valores de las masas en la segunda iteración si se parte del vector nulo, usando el sistema original y el método iterativo de Jacobi.

$$m^{(2)} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

5. **(0.5 pto)** Luego de cargar las 2 matrices A y b, <u>indique 2 formas</u> de obtener las masas con alguna instrucción de MATLAB.
   a) m=b\A
   b) m=linsolve(A,b)
   c) m=inv(b)*A
   d) m=A^-1*b

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA **P.A. 2015-2**
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA **21/12/2015**
DACIBHCC

Problema 2

1. **(2 ptos)** Se desea encontrar la solución aproximada del siguiente sistema no lineal

$$\begin{aligned} \ln(1+x_2) - 2x_1 &= 0 \\ \sin x_1 \cos x_2 - 4x_2 + 1 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{en D} = \{\, x_1 \in [0 \ \tfrac{1}{4}\,] \,,\, x_2 \in [0 \ \tfrac{1}{2}\,] \}.$$

El algoritmo del punto fijo para resolver este sistema con punto inicial $X^{(0)}=(0\ ,\ 0)^T$ que garantiza la convergencia (L < 1) es:

a) $G(X) = \begin{bmatrix} \ln(1+x_2) - 2x_1 \\ \sin x_1 \cos x_2 - 4x_2 + 1 \end{bmatrix}$

b) $G(X) = \begin{bmatrix} \sin^{-1}\left(\frac{4x_2 - 1}{\cos x_2}\right) \\ e^{2x_1} - 1 \end{bmatrix}$

c) $G(X) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\ln(1+x_2) \\ \frac{1}{4}\sin x_1 \cos x_2 + \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

d) $G(X) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\ln(1+x_2) \\ \cos^{-1}\left(\frac{4x_2 - 1}{\sin x_1}\right) \end{bmatrix}$

El valor de L es: $\boxed{}$

2. **(1 pto)** Las iteraciones mínimas necesarias para alcanzar una tolerancia igual a 10^{-2}, pueden ser pronosticadas a partir de: $\left\| X^{(k)} - X^{*} \right\|_\infty \le \frac{L^k}{1-L} \left\| X^{(1)} - X^{(0)} \right\|_\infty \le tolerancia$

¿Cuál es el mínimo número de iteraciones para la tolerancia impuesta?

a) 7 b) 3 c)6 d) 2

3. **(1 pto)** Los valores más cercanos de la segunda iteración serán (redondeado a 3 cifras decimales):

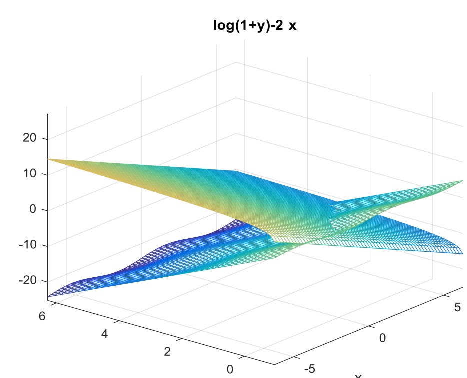
a) $X^{(2)}=(0\ \ 0.250)^T$ b) $X^{(2)}=(0.25\ \ 0.50)^T$ c) $X^{(2)}=(0.113\ \ 0.40)^T$ d) $X^{(2)}=(0.112\ \ 0.250)^T$

4. **(1pto)** Use los comandos en Matlab para graficar las superficies $\begin{aligned} z_1 &= \ln(1+x_2) - 2x_1 \\ z_2 &= \sin x_1 \cos x_2 - 4x_2 + 1 = 0 \end{aligned}$

....

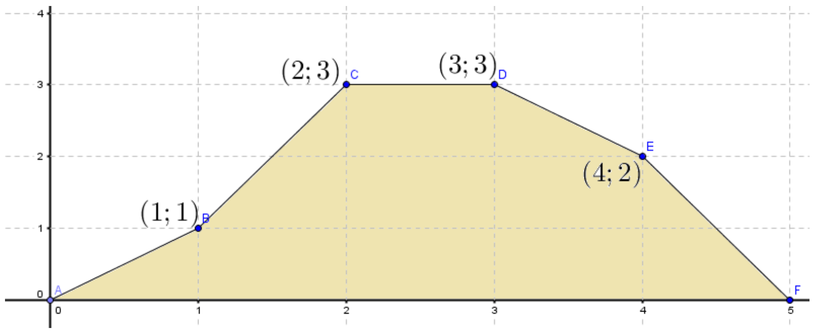
....

....



Problema 3

1. (**1pto**) Si el área de la región sombreada es 9 u^2 entonces utilizando el método del trapecio, el área de la región sombreada es:



a) 7.5 u^2 b) 8.5 u^2 c) 9 u^2 d) 10.5 u^2

2. (**1pto**) Dada la cuadratura de la forma $\int_0^1 f(x)dx \approx A_0 f(0) + A_1 f\left(\frac{1}{2}\right) + A_2 f(1)$, que es exacta para todos los polinomios de grado menor o igual a 2. El valor de $A_0 + A_1 + A_2$ es:
   a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 1

3. (**2ptos**) Asumiendo que se quiere aproximar $\int_1^5 \left(\frac{x^5}{20} + 5\right) dx$. Encontrar el número de subintervalos que garantice un error menor que 0,0001 usando la regla de Simpson.
   a) 20 b)30 c) 38 d) 44

4. (**1pto**) Use los comandos en Matlab para **hallar:**
   - **La derivada de la función** $f(x) = x^3 - 2x + 1$
   - **La integral de la función** $f(x)$ desde x=1 hasta x=5

....

....

....

Problema 4

Una partícula se mueve a lo largo del eje "x" siguiendo una trayectoria descrita por la siguiente ecuación diferencial:

$$\dddot{x}(t) + 5\ddot{x}(t) = t + 2x + 8\dot{x}(t)$$
$$x(0) = 1\,,\ \dot{x}(0) = -1, \quad \ddot{x}(0) = 2$$

Donde *x* está expresado en metros y el tiempo en segundos.

1. **(0.5 pto)** Seleccione la alternativa correcta para completar la transformación de esta EDO de tercer orden en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

   $\dot{x} = v \qquad \dot{v} = a \qquad \dot{a} = \cdots$

   a) $-t - 2x - 8v + 5a$
   b) $t + 2x - 8v - 5a$
   c) $t + 8x + 2v - 5a$
   d) $t + 2x + 8v - 5a$
   e) $1 + 2x + 8v - 5a$

2. **(1.0 pto)** Complete el término que falta del algoritmo de Taylor de orden 2, este debe estar en función *de* t_n, x_n, v_n *y* a_n . Toda la expresión corresponde a la aceleración a_{n+1} :

   $$a_{n+1} = a_n + h(t_n + 2x_n + 8v_n - 5a_n) +$$
   $$+ \frac{h^2}{2}(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$$

3. **(2.0 ptos)** Estime la aceleración para t=0.2 seg. mediante Taylor de orden 2 con h=0.1 seg.
   a) -0.8800 b)0.8750 c)0.8264 d)-0.8400 e)0.1941

4. **(0.5 pto)** Si la partícula tiene una masa de 5 kg determine la variación de su energía cinética entre los instantes t_1=0.1 y t_2=0.2 seg, en Joules:
   a) -0.127 b) 0.127 c) -0.172 d) 0.172 e) -0.271

5. **(1.0 pto)** Se desea escribir un programa en MATLAB para resolver la parte 4)

```
t(1)=0; x(1)=1; v(1)=-1; a(1)=2; h=0.1;
for i=1:2
    t(i+1)=t(i)+h;
    x(i+1)=x(i)+h*v(i)+h^2/2*a(i);
    sa=

    v(i+1)=v(i)+h*a(i)+h^2/2*sa;
    ssa=

    a(i+1)=a(i)+h*sa+h^2/2*ssa;
end
```

Completar el código:

Completar el código:

Los Profesores

Solución de la pregunta 1

1) Reemplazando las coordenadas de los 3 puntos al sistema, se tiene:

$$A = \begin{bmatrix} 0.2500 & 0.1250 & 0.0625 \\ 4.0000 & 8.0000 & 1.0000 \\ 16.0000 & 8.0000 & 81.0000 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 20 \\ 70 \end{bmatrix}$$

2) Por simple inspección con el rango de la matriz A y Ab, la **respuesta es: c)**
3) Se verifica que la matriz A es estrictamente diagonal dominante, por lo que converge para los 2 casos, la **respuesta es b)**
4) Calculando los parámetros intermedios:

```
D =0.2500        0           0
        0        8.0000        0
        0            0       81.0000

L =    0     0     0
       -4     0     0
      -16    -8     0

U =   0   -0.1250   -0.0625
        0         0   -1.0000
        0         0         0
```

T=inv(D)*(L+U)

```
T = 0   -0.5000   -0.2500
   -0.5000         0   -0.1250
   -0.1975   -0.0988         0
```

c= `inv(D)*b`

```
c = 4.0000
    2.5000
    0.8642
```

Primera Iteración:

```
m=4.0000
    2.5000
    0.8642
```

Segunda Iteración:

m=2.5340
0.3920
-0.1728

5) Respuesta: b y d

Solución de la pregunta 2:

1)

Respuesta c.) $G(X)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\ln(1+x_2)\\ \frac{1}{4}\sin x_1\cos x_2+\frac{1}{4}\end{bmatrix}$

Teorema de convergencia

$$J_{G(X)}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2(1+x_2)}\\ \frac{1}{4}\cos x_1\cos x_2 & -\frac{1}{4}\sin x_1\sin x_2\end{bmatrix}$$

$\left\|J_{G(0,0)}\right\|_1=\left\|\begin{matrix}0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & 0\end{matrix}\right\|\le \boxed{L=\frac{1}{2}<1}$ Por lo tanto garantiza la convergencia.

2.- $X^{(0)}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ y $X^{(1)}=G(0,0)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\ln(1+0)\\ \frac{1}{4}\sin 0\cos 0+\frac{1}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0.25\end{bmatrix}$

$k\ge\dfrac{\ln\left(\frac{tolerancia}{\left\|X^{(1)}-X^{(0)}\right\|_\infty}(1-L)\right)}{\ln(L)}$ =5.6439 $k\ge 6$ iteraciones **Respuesta c)**

3.- $X^{(1)}=G(0,0)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\ln(1+0)\\ \frac{1}{4}\sin 0\cos 0+\frac{1}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0.25\end{bmatrix}$

$X^{(1)}=G(0,0.25)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\ln(1+0.25)\\ \frac{1}{4}\sin 0\cos 0.25+\frac{1}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.112\\0.25\end{bmatrix}$ **Respuesta d)**

4.-
```
ezmesh('sin(x)*cos(y)-4*y+1')

hold on

ezmesh('log(1+y)-2*x')
```

Solución de la pregunta 3

(a) Dado que las funciones son lineales, el método de trapecio es exacta.

Clave c) 9 u^2

(b) También es exacta para polinomios de grado 0

$$\int_0^1 1dx = A_0 \times 1 + A_1 \times 1 + A_2 \times 1 = 1$$

Clave e)

(c)

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{1}{4}x^4; f''(x) = x^3; f^{(3)} = 3x^2; f^{(4)}(x) = 6x}$$

$$|E_S| \leq \frac{30(b-a)^5}{180n^4} \leq 0.0001$$

$$b = 5; a = 1;$$

$$n \geq 36.144$$

n=38

Clave c)

(d)

syms x

f=x^3 -2x + 1

df=diff(f,'x')

int(f,1,5)

Solución Pregunta 4

1)

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = a$$

$$\frac{da}{dt} = t + 2x + 8v - 5a$$

$$x(0) = 1 \qquad v(0) = -1 \qquad a(0) = 2$$

Resp . D

2)

$$t_0 = 0 \quad x_0 = 1 \quad v_0 = -1 \quad a_0 = 2 \quad h = 0.1$$

$$Para \quad N = 0, 1, 2,$$

$$t_{N+1} = t_N + h$$

$$x_{N+1} = x_n + hv_n + \frac{h^2}{2} a_n$$

$$v_{N+1} = v_n + ha_n + \frac{h^2}{2}(t_n + 2x_n + 8v_n - 5a_n)$$

$$a_{N+1} = a_n + h(t_n + 2x_n + 8v_n - 5a_n) +$$

$$+ \frac{h^2}{2}(1 + 2v_n + 8a_n - 5(t_n + 2x_n + 8v_n - 5a_n))$$

***Resp*:** $1 + 2v_n + 8a_n - 5(t_n + 2x_n + 8v_n - 5a_n)$

3)

```
%          t      x          v            a
%          0      1.0000     -1.0000      2.0000
%     0.1000      0.9100     -0.8800      0.8750
%     0.2000      0.8264     -0.8400      0.1941
```

Resp . E

4)

$$\Delta Ec = \frac{1}{2} m\left(v(0.2)^2 - v(0.1)^2\right) = -0.172\ J$$

Resp . C

5)

```
% sobreaceleracion.m
t(1)=0; x(1)=1; v(1)=-1; a(1)=2; h=0.1;
for i=1:2
   t(i+1)=t(i)+h;
   x(i+1)=x(i)+h*v(i)+h^2/2*a(i);
   sa=t(i)+2*x(i)+8*v(i)-5*a(i);
   v(i+1)=v(i)+h*a(i)+h^2/2*sa;
   ssa=1+2*v(i)+8*a(i)-5*sa;
   a(i+1)=a(i)+h*sa+h^2/2*ssa;
end
disp([t' x' v' a'])
m=5; Ec=1/2*m*(v(3)^2-v(2)^2)  % -0.1721
```

sa	t(i)+2*x(i)+8*v(i)-5*a(i);
ssa	1+2*v(i)+8*a(i)-5*sa;