Universidad Nacional de Ingeniería | P.A. 2015-1
Facultad de Ingeniería Mecánica | 21/07/15
DACIBAHCC

EXAMEN SUSTITUTORIO DE METODOS NUMERICOS (MB536)

- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO Y CALCULADORA**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**
- **PROHIBIDO EL USO DE CELULARES U OTROS EQUIPOS DE COMUNICACION ELECTRONICA**
- **DURACION: 110 MINUTOS**

Problema 1

En un análisis costo/beneficio entre (e) la cantidad de energía consumida y (up) las utilidades (+) o pérdidas (-) generadas en cierta planta, se determina a partir del siguiente sistema de ecuaciones:

$$8up + 9e = 2$$

$$4up + 6e = 10$$

Considerando **e** en MJ y **up** en miles de soles, determine en forma detallada lo siguiente:

a) **(0.5 ptos)** Usando el criterio de consistencia (solubilidad), verifique si el sistema tiene solución única.
b) **(1.0 pto)** Verifique si el sistema de ecuaciones está bien condicionado.
c) **(1.5 ptos)** Verifique la convergencia para el método iterativo de Jacobi.
d) **(2.0 ptos)** Desarrolle un script en MATLAB para resolver este sistema, usando el método de Jacobi hasta que el error (norma euclidiana) sea menor que 10^{-14} y muestre la cantidad de iteraciones necesarias

Problema 2

Sea el sistema no lineal: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - y = 0 \end{cases}$

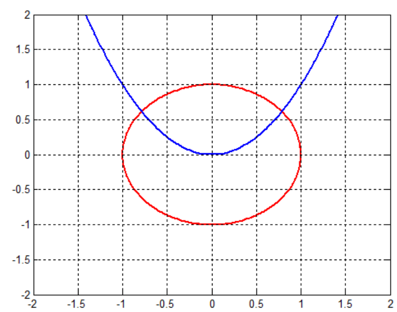


Fig. a Sistema No Lineal

a) **(2.0 ptos)** Determine el algoritmo de aproximaciones sucesivas para sistemas y **<u>compruebe la convergencia</u>** usando el valor inicial {0.5, 0.5}.(No realice iteraciones).
b) **(1.0 pto)** Determine <u>el algoritmo</u> de Newton Raphson para sistemas aplicado a este problema.
c) **(1.0 pto)** Realice 02 iteraciones usando Newton Raphson empezando con el valor inicial { 0.5 0.5} y determine el error cometido para cada variable en la segunda iteración.
d) **(1.0 pto)** Realice 02 iteraciones usando el algoritmo de a) con el valor inicial {0.5 0.5} y compare los resultados obtenidos en c). Comente su respuesta.

Problema 3

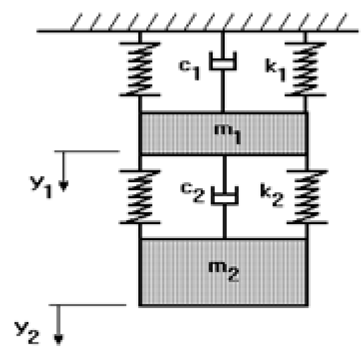
Al golpear una pelota de tenis con una raqueta, la pelota cambia de forma: primero se comprime y después se expande. Sea x la compresión de la pelota, con $0 \leq x \leq m$, y sea $f(x)$ la fuerza ejercida por la raqueta sobre la pelota. La energía trasferida es proporcional al área bajo la curva $y = f(x)$. Supongamos que $f_c(x)$ es la fuerza durante la compresión y $f_e(x)$ la fuerza durante la expansión. La energía es transferida a la pelota durante la compresión y transferida por la pelota durante la expansión, de modo que la energía perdida por la pelota en la colisión (debido al rozamiento) es proporcional a $\int_0^m [f_c(x) - f_e] dx$. Por lo tanto, el porcentaje de energía perdida en la colisión viene dada por: $100\frac{\int_0^m [f_c(x)-f_e]dx}{\int_0^m f_c(x)dx}$ Se han efectuado medidas en varios golpes de tenis con los resultados de la tabla.

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4
$f_c(x)$(libras)	0	25	50	90	160
$f_e(x)$(libras)	0	23	46	78	160

a) **(2.0 ptos)** Aplicar el método de Simpson (1/3) compuesto, para estimar el porcentaje de energía perdida por la pelota en la colisión con la raqueta. Comente su respuesta.
b) **(2.0 ptos)** Usando los mismos puntos de a), estimar el porcentaje de energía perdida por la pelota por la colisión con la raqueta utilizando el método del trapecio compuesto.
c) **(1.0 pto)** Implementar un script en MATLAB que resuelva a).

Problema 4

Sea el sistema masa-resorte mostrado en la figura:



El cual es gobernado por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales:

$$m_1\frac{d^2y_1}{dt^2}+c_1\frac{dy_1}{dt}+k_1y_1=0$$
$$m_2\frac{d^2y_2}{dt^2}+c_2\left(\frac{dy_2}{dt}-\frac{dy_1}{dt}\right)+k_2\left(y_2-y_1\right)=0$$

Se sabe que $c_1=4$, $c_2=1$, $k_1=2$, $k_2=4$, unidades en el Sistema Internacional.

Si al aplicar un paso de Euler se obtuvo los siguientes valores:

T	y1	y1'	y2	y2'
0	1	1	2	-1
0.1	1.1	0.7	1.9	-1.04

a) **(1.0 pto)** Transforme estas EDOs de segundo orden en un sistema de primer orden.
b) **(1.0 pto)** Determine las masas m_1 y m_2.
c) **(1.0 pto)** Escriba el algoritmo de Taylor de orden 2, para este sistema.
d) **(1.0 pto)** Determine la ubicación y velocidad de las masas en t=0.1 seg. aplicando Taylor de 2do orden, con h=0.1 seg.
e) **(1.0 pto)** Escriba una sola línea de comando en MATLAB para hallar la solución algebraica exacta.

Los Profesores

Solucionario

Pregunta 1:

a) El sistema tiene solución única porque se cumple

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \end{bmatrix} \quad Ampliada = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 2 \\ 4 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

Tiene solución única porque El rango de A es igual a la ampliada e igual a 2

b) La inversa de A es $\begin{bmatrix} 1/2 & -3/4 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$, aplicando el número de condicionamiento $k = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$=17*5/4=21.25 <$10^4$, por lo tanto el sistema está bien condicionado

c) Matrices del sistema son:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Por simple inspección se verifica que A no es estrictamente diagonal dominante.
Por lo tanto solo se debe verificar calculando el radio espectral

Tj=$(D)^{-1}$*(L+U)

Tj=$\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -9 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/8 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -9 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -9/8 \\ -4/6 & 0 \end{bmatrix}$

Calculando sus autovalores

$$\left\| \begin{bmatrix} 0 & -9/8 \\ -4/6 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -9/8 \\ -4/6 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda = \sqrt{3/2} = \pm 0.866$ <1

Por lo tanto converge.

d)

```
A=[ 8 9
4 6]
b=[2 10]'
D=diag(diag(A)); L=-tril(A,-1); U=-triu(A,1);
T=inv(D)*(L+U); c=inv(D-L)*b;
x=[0 0 0]';
xa=x;
for i=1:300000
    x=T*x+c;
    er=norm(x-xa,2);
    xa=x;
    if er<10e-14
        break
    end
end
disp(x)
disp(i)
```

Universidad Nacional de Ingeniería P.A. 2015-1
Facultad de Ingeniería Mecánica 21/07/15
DACIBAHCC

Solucionario

Pregunta 1:

a) El sistema tiene solución única porque se cumple

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \; b = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \end{bmatrix} \; Ampliada = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 2 \\ 4 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

Tiene solución única porque El rango de A es igual a la ampliada e igual a 2

b) La inversa de A es $\begin{bmatrix} 1/2 & -3/4 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$, aplicando el número de condicionamiento $k = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$=17*5/4=21.25 <$10^4$, por lo tanto el sistema está bien condicionado

c) Matrices del sistema son:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \; b = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Por simple inspección se verifica que A no es estrictamente diagonal dominante.
Por lo tanto solo se debe verificar calculando el radio espectral
Tj=$(D)^{-1}$*(L+U)

Tj=$\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -9 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/8 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -9 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -9/8 \\ -4/6 & 0 \end{bmatrix}$

Calculando sus autovalores

$$\left| \begin{bmatrix} 0 & -9/8 \\ -4/6 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -9/8 \\ -4/6 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda = \sqrt{3/2} = \pm 0.866$ <1

Por lo tanto converge.

d)

```
A=[ 8 9
4 6]
b=[2 10]'
D=diag(diag(A)); L=-tril(A,-1); U=-triu(A,1);
T=inv(D)*(L+U); c=inv(D-L)*b;
x=[0 0 0]';
xa=x;
for i=1:300000
    x=T*x+c;
    er=norm(x-xa,2);
    xa=x;
    if er<10e-14
        break
    end
end
disp(x)
disp(i)
```

Pregunta 2:

a) Primer arreglo $\begin{cases} x = \sqrt{y} = g_1(x,y) \\ y = \sqrt{1-x^2} = g_2(x,y) \end{cases}$

Prueba de convergencia

$$J_G = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2\sqrt{y}} \\ \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} & 0 \end{bmatrix}_{\{0.5,0.5\}} = \begin{bmatrix} 0 & 0.7071 \\ -0.5774 & 0 \end{bmatrix} \qquad \|J_G\|_1 = 0.7071 \le k < 1$$

Por lo tanto converge el arreglo y se convierte en algoritmo.

Algoritmo de aproximaciones sucesivas

$$x_{i+1} = \sqrt{y_i}$$

$$y_{i+1} = \sqrt{1-x_i^2}$$

b) Algoritmo de Newton Raphson

$$F = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 - 1 \\ x^2 - y \end{bmatrix}$$

$$J_F = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Delta X = -\begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x^2 + y^2 - 1 \\ x^2 - y \end{bmatrix}$$

$$X^{(i+1)} = X^{(i)} + \Delta X$$

c) Dos iteraciones $\qquad X^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$$\Delta X = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.375 \\ 0.125 \end{bmatrix}$$

$$X^{(1)} = X^{(0)} + \Delta X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{8} \\ \frac{5}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.875 \\ 0.625 \end{bmatrix}$$

$$\Delta X = -\begin{bmatrix} \frac{7}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{7}{4} & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{5}{32} \\ \frac{9}{64} \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} -0.0843 \\ -0.0069 \end{bmatrix}$$

Error de cada variable

$$X^{(2)} = X^{(1)} + \Delta X = \begin{bmatrix} 0.7907 \\ 0.6181 \end{bmatrix}$$

d) $x_{i+1} = \sqrt{y_i}$
$y_{i+1} = \sqrt{1-x_i^2}$

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.7071 \\ 0.8660 \end{bmatrix} \qquad X^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.9306 \\ 0.7071 \end{bmatrix}$$

El proceso es más lento que Newton Raphson.

Pregunta 3:

a)

$$\int_0^{0.4} f_c(x)\,dx \approx \frac{0.1}{3}[0+4(25)+2(50)+4(90)+160] = 24.$$

Regla de Simpson:

$$\int_0^{0.4}[f_c(x) - f_e(x)]\,dx,$$

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
$f_c(x) - f_e(x)$	0	2	4	12	0

$$\int_0^{0.4}[f_c(x) - f_e(x)]\,dx \approx \frac{0.1}{3}[0+4(2)+2(4)+4(12)+0] = \frac{6.4}{3}.$$

El porcentaje de energía perdida es $\frac{100(\frac{6.4}{3})}{24} = 8{,}9\%$. Existe más del 90% de energía retenida en la colisión.

b)

$$\int_0^{0,4} f_c(x)dx \approx 24{,}5$$

$$I_1 = \left(\frac{0{,}1}{2}\right)\left(f_c(0) + 2f_c(0{,}1) + 2f_c(0{,}2) + 2f_c(0{,}3) + f_c(0{,}4)\right) = 24{,}5$$

$$\int_0^{0,4} f_e(x)dx \approx 24{,}5$$

$$I_2 = \left(\frac{0{,}1}{2}\right)\left(f_e(0) + 2f_e(0{,}1) + 2f_e(0{,}2) + 2f_e(0{,}3) + f_e(0{,}4)\right) = 22{,}7$$

Porcentaje de energía perdida

100(1-22,7/24,5)=7,3439%. Existe más del 92% de energía retenida en la colisión.

c)

```
x=[0 0.1 0.2 0.3 0.4]
fc=[0 25 50 90 160]
fe=[0 23 46 78 160]
```

```
fcpar=fc(2:2:length(x)-1);
fcimpar=fc(3:2:length(x)-1);
fepar=fe(2:2:length(x)-1);
feimpar=fe(3:2:length(x)-1);
I=100*(fc(1)-fe(1)+4*sum(fcpar-fepar)+2*sum(fcimpar-feimpar)+(fc(length(x))-
fe(length(x)))./(fc(1)+4*sum(fcpar)+2*sum(fcimpar)+fc(length(x)))
```

Pregunta 4

a) **Reducción primer orden:**

$$\frac{dy_1}{dt} = v_1$$
$$\frac{dv_1}{dt} = -\frac{c_1 v_1 + k_1 y_1}{m_1}$$
$$\frac{dy_2}{dt} = v_2$$
$$\frac{dv_2}{dt} = -\frac{c_2(v_2 - v_1) + k_2(y_2 - y_1)}{m_2}$$

b) **Algoritmo de Euler:**

$$y_1^{N+1} = y_1^N + h * v_1{}^N$$
$$v_1^{N+1} = v_1^N + h * -\frac{c_1 v_1{}^N + k_1 y_1{}^N}{m_1}$$
$$y_2^{N+1} = y_2^N + h * v_2{}^N$$
$$v_2^{N+1} = v_2^N + h * -\frac{c_2\left(v_2{}^N - v_1{}^N\right) + k_2\left(y_2{}^N - y_1{}^N\right)}{m_2}$$

Reemplazando valores: m_1=2 y m_2=5

c) **Algoritmo de Taylor 2:**

$$y_1^{N+1} = y_1^N + h * v_1{}^N + \frac{h^2}{2} * v_1{}'^N$$
$$v_1^{N+1} = v_1^N + h * -\frac{c_1 v_1{}^N + k_1 y_1{}^N}{m_1} + \frac{h^2}{2} * -\frac{c_1 v_1{}'^N + k_1 y_1{}'^N}{m_1}$$
$$y_2^{N+1} = y_2^N + h * v_2{}^N + \frac{h^2}{2} * v_2{}'^N$$
$$v_2^{N+1} = v_2^N + h * -\frac{c_2\left(v_2{}^N - v_1{}^N\right) + k_2\left(y_2{}^N - y_1{}^N\right)}{m_2} + \frac{h^2}{2} * -\frac{c_2\left(v_2{}'^N - v_1{}'^N\right) + k_2\left(y_2{}'^N - y_1{}'^N\right)}{m_2}$$

d) Reemplazando se obtuvo los siguientes valores:

t	y1	y1’	y2	y2’
0	1	1	2	-1
0.1	1.085	0.725	1.898	-1.0346

e) Comando MATLAB:

Haciendo y1=y; y2=z y reemplazando valores:

```
>> [y,z]=dsolve('D2y=-2*Dy-y','D2z=-1/5*(Dz-Dy)-4/5*(z-y)','y(0)=1','Dy(0)=1','z(0)=2','Dz(0)=-1')
```