EXAMEN FINAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO Y CALCULADORA**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**
- **PROHIBIDO EL USO DE CELULARES U OTROS EQUIPOS DE COMUNICACION ELECTRONICA**
- **DURACION: 110 MINUTOS**

Problema 1

Para investigar la resistencia del aire durante la caída libre, una pelota de m=1kg cae al suelo desde una altura H=10m. Para lo cual se tomarán medidas de la altura cada cierto tiempo, la siguiente tabla incluye los correspondientes valores:

t[s]	0	2.0	3.1
H[m]	10	3.85	0

Figura 1 Caída libre de una pelota con resistencia del aire

La caída libre de una pelota se muestra en la Figura 1.

a) **(2.0 ptos)** Usando el Polinomio de Lagrange, determine el **polinomio interpolante** que pasa por estos puntos medidos.

b) **Determine la velocidad** en el tiempo de 3.1 segundos usando:

b.1) **(0.5 ptos)** La función obtenida en a)

b.2) **(1.0 pto)** La fórmula de dos puntos hacia adelante y hacia atrás con h=0.01 y el error cometido en cada caso.

b.3) **(1.0 pto)** la fórmula de tres puntos centrales con h=0.01 y su error cometido.

c) **(0.5 ptos)** Comente sus resultados.

Ayuda : La función H(t) es exactamente un polinomio de grado 2.

Problema 2

La fuerza que se necesita para desplazar un objeto es:
$F(x) = 40cos(2x) + 10$ y el trabajo realizado es $W = \int_1^4 F(x)dx$ (Todas las unidades en SI, no realice ninguna conversión)

a) **(2.0 ptos)** Calcule el mínimo número de intervalos para que el error absoluto sea inferior a 1.5, usando el método del trapecio.

b) **(2.0 ptos)** Calcule W y el error, usando la cuadratura de Gauss-Legendre usando 3 puntos.

c) **(1.0 pto)** Desarrolle un script en MATLAB que permita determinar el resultado del ítem b)

Problema 3

Sea la Ecuación diferencial ordinaria de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} = C\,x\,y \qquad y(1) = 2 \qquad C > 0$$

a) **(1.5 ptos)** Al aplicar el método de Taylor de segundo orden con **h=0.1**, se obtuvo **y(1.1)=2.01.** Determine el valor de C.

b) **(2.0 ptos)** Estime **y(1.1)** con **h=0.1**, aplicando Taylor de orden 3 y determine el error.

c) **(1.5 ptos)** Escriba un programa en MATLAB para obtener **y(2)** mediante Taylor de orden 3 considerando N sub-intervalos, así como el error.

Problema 4

En el estudio de fermentación cinética que permite generar penicilina, la ley logística

$$\frac{dy_1}{dt} = k_1 y_1 \left(1 - \frac{y_1}{k_2}\right)$$

ha sido usada para describir la dinámica de crecimiento. El término $\left(1 - \frac{y_1}{k_2}\right)$ incluye los efectos del cese de crecimiento por falta de nutrientes. Se sabe que el grado de producción de la penicilina satisface la ecuación

$$\frac{dy_2}{dt} = k_3 y_1 - k_4 y_2$$

es decir, es proporcional al grado de concentración de células y se degrada por hidrólisis.

a) **(3.5 ptos)** Aproximar $y_1(3)$, $y_2(3)$ utilizando el método de Euler considerando h=1. Sabiendo que:

$k_1 = 0{,}0312 \quad ; k_2 = 47{,}7 \quad ; k_3 = 3{,}374 \quad ; k_4 = 0{,}01268 \quad ; y_1(0) = 5 \quad ; y_2(0) = 0$

b) **(1.5 ptos)** Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales para $t \in [0,10]$ con las condiciones iniciales dadas utilizando el comando ode45 de MATLAB.

Los Profesores

Solución Problema 1

a) Usando el Polinomio de Lagrange

$$H(t) = \sum_{i=0}^{n} H_i l_i(t)$$

$$l_i(t) = \Pi_{i\neq j}^{n} \frac{t - t_j}{t_i - t_j}$$

$$l_1 = \frac{(t-2)(t-3.1)}{(0-2)(0-3.1)} = \frac{t^2 - 5.1t + 6.2}{6.2} = 0.1613t^2 - 0.8226t + 1$$

$$l_2 = \frac{(t-0)(t-3.1)}{(2-0)(2-3.1)} = \frac{t^2 - 3.1t}{-2.2} = -0.4545t^2 + 1.4091t$$

$$l_3 = \frac{(t-0)(t-2)}{(3.1-0)(3.1-2)} = \frac{t^2 - 2t}{3.41} = 0.2933t^2 - 0.5865t$$

$$H(t) = 10 \cdot (0.1613t^2 - 0.8226t + 1) + 3.85 \cdot (-0.4545t^2 + 1.4091t)$$

$$H(t) = -0.1368 \cdot t^2 - 2.801 \cdot t + 10$$

b) Solución de la velocidad a partir del polinomio

$$\dot{H}(t) = 2a \cdot t + b$$

$$\dot{H}(t) = -0.274 \cdot \bar{t} - 2.801 = -3.6504$$

b.1) Fórmula de dos puntos hacia adelante

$$\delta_+ = \frac{f(\bar{t}+h) - f(\bar{t})}{h}$$

$$\delta_+ = \frac{-0.1368 \cdot (3.1+0.01)^2 - 2.801 \cdot (3.1+h) + 10 + 0.1368(3.1)^2 + 2.801 \cdot (3.1) - 10}{0.01}$$

$$\delta_+ = -3.6518$$

$$E = 0.0014$$

Fórmula de dos puntos hacia atrás

$$\delta_- = \frac{-0.1368 \cdot (3.1)^2 - 2.801 \cdot (3.1) + 10 + 0.1368(3.1-0.01)^2 + 2.801 \cdot (3.1-0.01) - 10}{0.01}$$

$$\delta_- = -3.649$$

$$E = 0.0014$$

b.2) Fórmula central de tres puntos

$$\delta = \frac{-0.1368(3.1+0.01)^2 - 2.801(3.1+0.01) + 0.1368(3.1-0.01)^2 + 2.801(3.1-0.01)}{0.02}$$

$$\delta = -3.6504$$

$$E = 0.0$$

c) La fórmula de tres puntos es exacta porque la función es una parábola.

Solución Problema 2

a) La integral exacta es: 10*x + 20*sin(2*x)

Iexacta=31.6012

Aplicando el método del trapecio:

Cant Intervalos=1 Iaprox=-3.69 error =35.3

Cant Intervalos=2 Iaprox=30.17 error =1.4309

Por lo tanto la respuesta es 2

b)Usando el polinomio de Legendre

xlegendre	c	Xi(ab)	f(xi)

-0.7745966692	0.5555555555	1.3381	-25.7460
0.0	0.8888888888	2.5000	21.3465
+0.7745966692	0.5555555555	3.6619	30.2279

Aplicando $\frac{(b-a)}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$

I= 32.1969 error= 0.5957

c)

```
cad='40*cos(2*x)+10';
fi=inline(int(cad));
a=1;b=4;n=3
ie=fi(b)-fi(a)
f=inline(cad);
s=0;
c=[0.5555555555
0.8888888888
0.5555555555];
x=[-0.7745966692
0.0
+0.7745966692];
x=x*(b-a)/2+(b+a)/2;
for i=1:n
    s=s+c(i)*f(x(i));
end
I=(b-a)*s/2
error=abs(ie-I)
```

Solución Problema 3

a)

Taylor 2

$x_0 = 1 \quad y_0 = 2 \quad y_1 = 2.01 \quad h = 0.1$

$$y_1 = y_0 + hC\,x_0\,y_0 + \frac{h^2}{2}C\left(C\,x_0^{\,2}\,y_0 + y_0\right)$$

$$2.01 = 2 + 0.1C(1)(2) + \frac{0.1^2}{2}C\left(C(1)^2(2) + 2\right)$$

$C = 0.0475115548$

b)

Taylor 3

$x_0 = 1 \quad y_0 = 2 \quad h = 0.1$

$$y_1 = y_0 + hC\,x_0\,y_0 + \frac{h^2}{2}C\left(C\,x_0^{\,2}\,y_0 + y_0\right) + \frac{h^3}{6}C^2 y_0\,x_0\left(3 + Cx_0^{\,2}\right)$$

$y_1 = 2.010002293097881$

Obteniendo la solución exacta por separación de variables:

$y(x) = 2e^{-C/2}e^{CX^2/2}$

$y(1.1) = 2.010002355204732$

$\text{error} = 0.000000062106850$

c)

PROGRAMA MATLAB

```
x=solve('-0.01+0.2*C+0.1*0.1/2*C*(2*C+2)')
C=x(2)
X(1)=1
Y(1)=2
N=10
H=0.1
YE=dsolve('Dy=0.0475115548*x*y','y(1)=2','x')
for i=1:N
       X(i+1)=X(i)+H;
       Y(i+1)=Y(i)+H*C*X(i)*Y(i)+H^2/2*C*(C*X(i)^2*Y(i)+Y(i))+ H^3/6*C^2*
X(i)*Y(i)* (3+ +C*X(i)^2);
end
Ye=subs(YE,X);
disp([X' Y' Ye' abs(Y'-Ye')])
```

Solución Problema 4

(a)

$$Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = F(t,Y) = \begin{pmatrix} 0{,}0312 y_1 (1 - \frac{y_1}{47.7}) \\ 3{,}374 y_1 - 0{,}01268 y_2 \end{pmatrix}$$

$$Y(0) = Y_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Y(1) \approx Y_1 = Y_0 + hF(t_0, Y_0)$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 * \begin{pmatrix} 0{,}0312 * 5(1 - \frac{5}{47.7}) \\ 3{,}374 * 5 - 0{,}01268 * 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}1396 \\ 16{,}87 \end{pmatrix}$$

$$Y(2) \approx Y_2 = Y_1 + hF(t_1, Y_1)$$

$$= \begin{pmatrix} 5{,}1396 \\ 16{,}87 \end{pmatrix} + 1 * \begin{pmatrix} 0{,}0312 * 5{,}1396(1 - \frac{5{,}1396}{47.7}) \\ 3{,}374 * 5{,}1396 - 0{,}01268 * 16{,}87 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}2827 \\ 33{,}9971 \end{pmatrix}$$

$$Y(3) \approx Y_3 = Y_2 + hF(t_2, Y_2)$$

$$= \begin{pmatrix} 5{,}2827 \\ 33{,}9971 \end{pmatrix} + 1 * \begin{pmatrix} 0{,}0312 * 5{,}2827(1 - \frac{5{,}2827}{47.7}) \\ 3{,}374 * 5{,}2827 - 0{,}01268 * 33{,}9971 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}4293 \\ 51.3898 \end{pmatrix}$$

(b)

Implementando la función

```
function du=f(t,u)
du1=0.0312*u(1)*(1-u(1)/47.7);
du2=3.374*u(1)-0.01268*u(2);
du=[du1, du2];
```

```
>>[t,u]=ode45('f', [0  10],[5  0])
```