EXAMEN PARCIAL DE METODOS NUMERICOS (MB536B)

- **DURACION: 110 MINUTOS**
- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO A4**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**

Problema 1

a) **(2.5 Pts)** Se tiene un trapecio de base menor ***a***, base mayor ***b*** y altura ***h***, si ***d*** es la distancia de la base mayor a un eje centroidal paralelo a dicha base. $d = \frac{1}{3}\left(\frac{2a+b}{a+b}\right)h$

Si ***a=4 ± 0.1 m***, ***b=2 m ± 1 %***, ***h=2.25*** medido con una precisión de 2 cifras decimales exactas. Estime **d (m)**, indique su error absoluto y relativo esperado e indique en que rango se encontrará su valor exacto.

b) **(2.5 Pts)** Sea un sistema basado en la norma IEEE-754 con las siguientes características: Almacenamiento de 16 bits: signo: 1 bit, exponente: 6 bits, mantisa : 9 bits, determine:

i) El menor número positivo normalizado valor binario y decimal
ii) El número menos Infinito ($-\infty$) valor binario
iii) El valor de d de la pregunta a) valor binario y decimal

Problema 2

Sea el sistema:

$$\begin{bmatrix} b & 2b^2 & 0 & 0 \\ 1 & 3b & 2b^2 & 0 \\ 0 & 1 & 3b & 2b^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b-2b^2 \\ -2b^2-3b+1 \\ 2b^2-3b-1 \\ 3b-1 \end{bmatrix}$$

a) **(1.5 Pto)** Para qué valores de ***b*** el sistema presenta solución única?
b) **(2.0 Pts)** Obtener la factorización de Crout.
c) **(1.5 Pts)** Resolver los sistemas triangulares obtenidos en b)

Problema 3

Sea el sistema: $\begin{bmatrix} m & -1 & 0 \\ -1 & m & -1 \\ 0 & -1 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+2 \\ m+3 \\ m+2 \end{bmatrix}$

a) **(2.0 Pto.)** Encuentre todos los valores posibles para los cuales el método de Jacobi es convergente.
b) **(1.5 Pto.)** Realice 05 iteraciones del Método de Jacobi a partir de un vector inicial igual a Cj, considere m=2, estime el error para cada iteración. ¿Habrá convergencia?
c) **(1.5 Pto)** Escriba una función en Matlab que realice ***n*** iteraciones de Gauss-Seidel, use la siguiente cabecera: ***function [x, err]=calcula(m,n)***

Problema 4

Sea la Ecuación No Lineal: $8x-\cos(x)-2x^2=0$

a) **(1.0 Pto.)** Localice todas las raíces con intervalos de longitud 0.5
b) **(1.5 Pts.)** Encuentre la mayor raíz mediante 03 iteraciones de Bisección partiendo del intervalo obtenido en a) y estime el error
c) **(1.5 Pts.)** A partir de la respuesta en b) aplique el método de aproximaciones sucesivas hasta tener una precisión de 10^{-3}.Fundamente la formula de error y pruebe por lo menos 2 alternativas.
d) **(1 Pto.)** Escriba un programa MATLAB para la parte c).

Los Profesores

SOLUCION 1

a)

$a = 4 \quad \xi_a = 0.1$

$b = 2 \quad \xi_b = 2x0.01$

$h = 2.25 \quad \xi_h = 0.5x10^{-2}$

$$d = \frac{1}{3}\left(\frac{2a+b}{a+b}\right)h = 1.25$$

$$\xi_d = \left|\frac{\partial d}{\partial a}\right|\xi_a + \left|\frac{\partial d}{\partial b}\right|\xi_b + \left|\frac{\partial d}{\partial h}\right|\xi_h$$

$$\xi_d = |0.0417|x0.1 + |-0.0833|x0.02 + |0.5556|x0.005$$

$$\xi_d = 0.0086\,(0.6889\,\%)$$

$$d - \xi_a \le D \le d + \xi_a$$

$$1.2414 \le D \le 1.2586$$

b)

i)

Realmin=(-1)^0*(1.000000000)*2^(000001-31)=2^-30

Decimal = 9.3132e-010

Binario = 0 000001 000000000

ii)

Menos_Infinito

Binario = 1 111111 000000000

iii)

1.25=1.01=1.010000000*2^0

X=(-1)^0*1.010000000*2^(E-31)

E-31=0 E=31=011111

Binario = 1 011111 010000000

Decimal = 1.25

SOLUCION 2

a)

$$\begin{bmatrix} b & 2b^2 & 0 & 0 \\ 1 & 3b & 2b^2 & 0 \\ 0 & 1 & 3b & 2b^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b-2b^2 \\ -2b^2-3b+1 \\ 2b^2-3b-1 \\ 3b-1 \end{bmatrix}$$

Para solución única se requiere que:

Rango(A)=Rango(A|b)=4

O también **det(A)≠0**

b^4≠0

Por lo tanto para que el sistema tenga solución única se requiere que **b≠0**

b) Factorización de Crout:

$$\begin{bmatrix} b & 2b^2 & 0 & 0 \\ 1 & 3b & 2b^2 & 0 \\ 0 & 1 & 3b & 2b^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 2b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Resolviendo los sistemas triangulares:

$$\begin{bmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b - 2b^2 \\ -2b^2 - 3b + 1 \\ 2b^2 - 3b - 1 \\ 3b - 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2b \\ -2b - 1 \\ 2b - 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2b \\ -2b - 1 \\ 2b - 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

<u>SOLUCION 3</u>

a) **Para obtener todos los posibles valores de convergencia aplicamos el criterio del radio espectral.**

$$\begin{bmatrix} m & -1 & 0 \\ -1 & m & -1 \\ 0 & -1 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+2 \\ m+3 \\ m+2 \end{bmatrix}$$

$$T_J = \begin{bmatrix} 0 & 1/m & 0 \\ 1/m & 0 & 1/m \\ 0 & 1/m & 0 \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = \det(T_J - \lambda I) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{2}}{m} \quad \lambda_3 = -\frac{\sqrt{2}}{m}$$

$$\rho(T_J) = \frac{\sqrt{2}}{|m|} < 1$$

$$m > \sqrt{2} \quad \vee \quad m < -\sqrt{2}$$

b) Iteraciones de Jacobi : m=2

$$T_J = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_J = \begin{bmatrix} 2 \\ 2.5 \\ 2 \end{bmatrix} = X^{(0)}$$

x1	x2	x3	err
2.0000	2.5000	2.0000	-----
3.2500	4.5000	3.2500	2.6693
4.2500	5.7500	4.2500	1.8875
4.8750	6.7500	4.8750	1.3346
5.3750	7.3750	5.3750	0.9437
5.6875	7.8750	5.6875	0.6673

Se ha calculando el error usando norma cuadrática. Dado que el error está decreciendo podemos afirmar que habrá convergencia. Además esta en el rango de convergencia. La solución exacta es $[6.5, 9, 6.5]^T$.

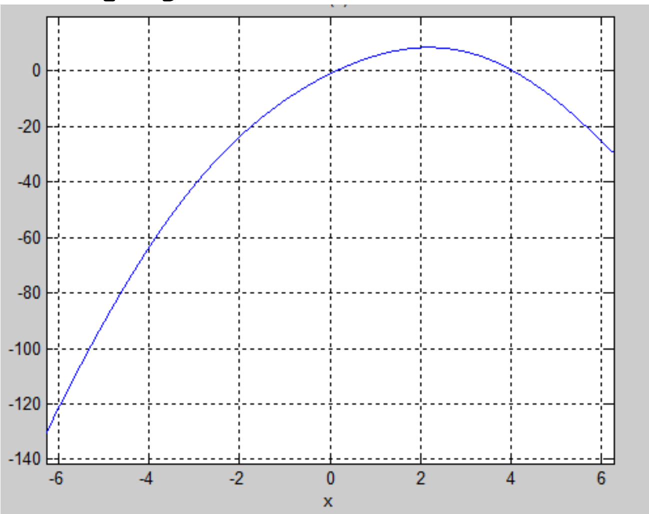
c) Función en MATLAB:

```
function [x, err]=calcula(m,n)
  A=[m -1 0;-1 m -1;0 -1 m];
  B=[m+2 m+3 m+2]';
  D=diag(diag(A));
  L=D-tril(A);
  U=D-triu(A);
  Tj=inv(D)*(L+U);
  Cj=inv(D)*B;
  x=Cj;
  for i=1:n
    xn=Tj*x+Cj;
    err=norm(xn-x,2)
    x=xn;
  end
```

SOLUCION 4

a) **Localización de las raíces:**

Tabulando y bosquejando la función:



Hay raíces en los intervalos: [0,0.5] y [4,4.5]

b) **Bisección**

a	c	b	e
4	4.25	4.5	0.25
4	4.125	4.25	0.125
4	4.0625	4.125	0.0625

La raíz aproximada es 4.0625 con una precisión de 0.0625.

c) **Aproximaciones sucesivas:**

$$x^{N+1} = \frac{\cos\left(x^N\right) + 2\left(x^N\right)^2}{8} \quad \textit{Diverge!!}$$

$$x^{N+1} = \sqrt{\frac{8\left(x^N\right) - \cos\left(x^N\right)}{2}} \quad \textit{Converge!!}$$

x	err
4.0625	------
4.0685	0.0060
4.0711	0.0026
4.0723	0.0012
4.0728	0.0005

d) Código MATLAB

```
% ss='(cos(x)+2*x^2)/8'
ss='sqrt((8*x-cos(x))/2)'
g=inline(ss)
x=4.0625; acum=[x NaN];
for i=1:100
   xn=g(x);
   err=abs(xn-x);
   x=xn;
   acum=[acum;x err];
   if err<1e-3
        break
   end
end
disp(acum)
```