UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA — P.A. 2014-1
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA — 18/07/2014
DACIBAHCC

EXAMEN SUSTITUTORIO DE METODOS NUMERICOS (MB536)

- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO Y CALCULADORA**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**
- **PROHIBIDO EL USO DE CELULARES U OTROS EQUIPOS DE COMUNICACION ELECTRONICA**
- **DURACION: 110 MINUTOS**

Problema 1

La estructura mostrada en la Fig. 1 es analizada estática y dinámicamente. En el caso estático se determinan tanto las reacciones de apoyo y los esfuerzos en las barras. El sistema de ecuaciones que se obtienen a partir de la posición de equilibrio son:

$$\left[\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 2a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}}_{A}\right] \underbrace{\begin{bmatrix} A_y \\ A_x \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} F \\ 0 \\ Fa \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{b}$$

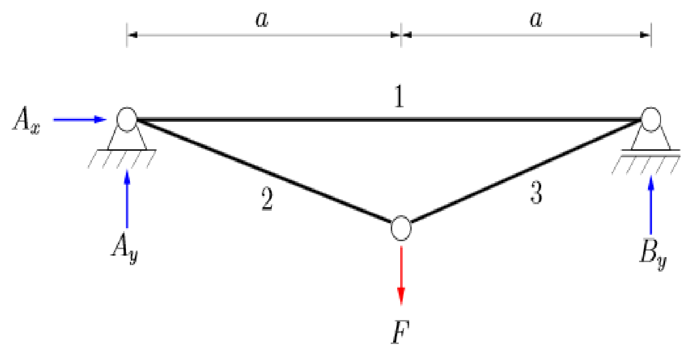


Fig.1 Barras en equilibrio

a) **(1 pto)** Para resolver las fuerzas primero debe hacer pivoteo parcial usando una matriz P de permutaciones**,** intercambiando las siguientes filas debe cambiar en la matriz P:
Fila 3 por la Fila2
Fila 5 por la Fila 3
Fila 2 por la Fila 4
Fila 4 por la Fila 5
Se pide Calcular $\tilde{A} = PA$ y $\tilde{b} = Pb$, donde $\tilde{A}$ y $\tilde{b}$ son matrices permutadas por el intercambio de filas.

b) **(2 ptos)** Resuelva el sistema lineal modificado $\tilde{A}x = \tilde{b}$ con ayuda del método de Eliminación Gaussiana, la solución corresponde a las fuerzas resultantes en función de F(kN) y a(m)

c) **(1 pto)** Muestre las matrices L y U de Doolitle para $\tilde{A}$**.** L y U están en función de F(kN) y a(m).

d) **(1 pto)** ¿Es posible la factorización de Cholesky? Justifique usando condiciones (No desarrolle el método).

Ayuda: Tome la Matriz P=I, matriz identidad.

Problema 2

Dada la función: $f(x) = x^2e^x - 1$

a) **(1 pto)** Mediante el método gráfico localizar la (o las) solución(es) de la ecuación.

b) **(2 ptos)** Efectúe 3 iteraciones utilizando el método de la Bisección y dar el aproximado de la raíz, con ancho del intervalo inicial igual a uno.

c) **(2 ptos)** Efectúe 3 iteraciones utilizando el método del punto fijo y dar el aproximado de la raíz (justifique mediante las condiciones de convergencia). Use como punto inicial la tercera iteración del método de la Bisección.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA **P.A. 2014-1**
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA **18/07/2014**
DACIBAHCC

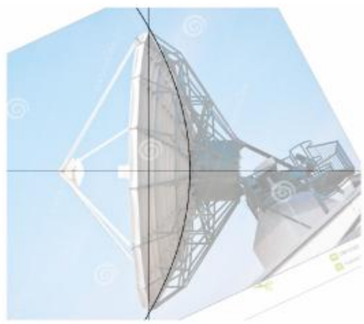
Problema 3

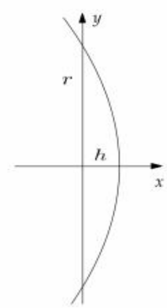
La forma de una antena de disco es una parábola que gira alrededor de un eje de simetría, denominada **paraboloide de revolución**. El área superficial de una antena de radio r=6m y profundidad h=1m que obtenemos al girar la gráfica de

$$f(x) = r\sqrt{1-\frac{x}{h}}$$

alrededor del eje X está dado por el siguiente modelo

$$A_S = 2\pi\int_0^h f(x)\sqrt{1+\left[f\,'(x)\right]^2}\,dx$$





a) **(2ptos)** Aproxime el área superficial de la antena utilizando un intervalo del **método de Simpson 1/3.**
b) **(2ptos)** Encuentre **n** tal que el error en la aproximación de la integral usando la regla trapezoidal sea inferior a 0,00001
c) **(1pto)** Implemente un script en MatLab que resuelva a) para un número par de sub-intervalos.

Problema 4

Un sistema de dos tanques de agua acoplados es gobernado por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dH_1}{dt} = \frac{Q_1 - \alpha_1\sqrt{H_1} - \alpha_3 sign(H_1 - H_2)\sqrt{|H_1 - H_2|}}{A_1}$$

$$\frac{dH_2}{dt} = \frac{Q_2 - \alpha_2\sqrt{H_2} + \alpha_3 sign(H_1 - H_2)\sqrt{|H_1 - H_2|}}{A_2}$$

Si las secciones de los tanques son A_1=900 cm^2 y A_2=1000 cm^2; los caudales de entrada a los tanques son Q_1=1000 cm^3/s y Q_2=2000 cm^3/s; las constantes experimentales α_1=20, α_2=30 y α_3=40. Si inicialmente los tanques tienen niveles de H_1=5 cm y H_2=10 cm, respectivamente:

a) **(3.5 ptos)** Determine el nivel de los tanques a cabo de 2 segundos, utilice Euler con Δt=1 seg.
b) **(1.5 ptos)** Escriba un programa MATLAB, para la parte a).

Los Profesores

Solución Problema 1

a)

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} F \\ F \cdot a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ F \cdot a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

mit $L_{41} = 1$ und $L_{52} = \frac{1}{2a}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ F \cdot a \\ 0 \\ -F \\ -\frac{F}{2} \end{bmatrix}$$

mit $L_{42} = -\frac{1}{2a}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ F \cdot a \\ 0 \\ -\frac{F}{2} \\ -\frac{F}{2} \end{bmatrix}$$

b)

$S_3 = \frac{F}{2}\sqrt{2}$
$S_2 = \frac{F}{2}\sqrt{2}$
$S_1 = -\frac{F}{2}$
$B_y = \frac{F}{2}$
$A_y = \frac{F}{2}$
$A_x = 0kN$ del gráfico

c)

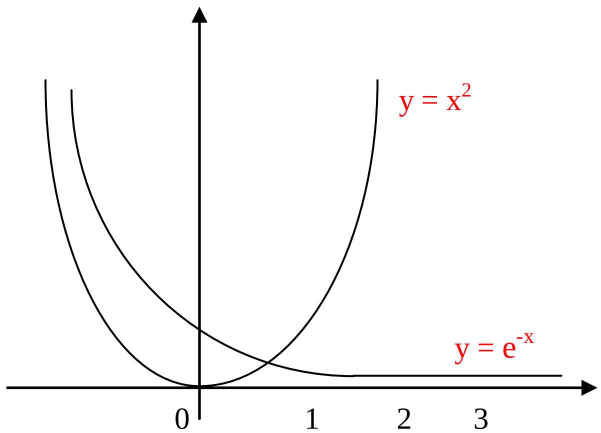
$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2a} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2a} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d) No es posible la factorización de Cholesky porque la matriz no es simétrica y definida positiva, porque los valores propios de A son los mismos que los valores propios de U.

Solución del Problema 2

a) $f(x) = x^2e^x - 1 = 0$ Entonces: $x^2 = e^{-x}$

Graficando:



$f(0) = -1$; $f(1) = 1.7182$

Del gráfico: una única solución en el intervalo [0, 1]

b) BISECCIÓN:

$$x_i = \frac{a_i + b_i}{2} \qquad [a_0, b_0] = [0,1] \qquad f(0) = -1 \qquad f(1) = 1.7182$$

i	a_i	b_i	x_i	$f(x_i)$
0	0	1	0.5	-0.5878
1	0.5	1	0.75	0.1908
2	0.5	0.75	**0.625**	-0.2702

Luego: $x = 0.625$

c) $x^2e^x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{1}{e^x}} = g(x) \quad \text{........}(I)$

Analizando la convergencia:

i) $|g'(x)| < 1 \qquad \forall x \in [0,1] \qquad g'(x) = -\dfrac{1}{2e^{x/2}}$

verificando:

$$|g'(0)| = 0.5 < 1 \qquad ; \qquad |g'(1)| = 0.303 < 1$$

ii) g(x) ϵ [0, 1]

verificando:

g(0) = 1 ϵ [0, 1] g(1) = 0.6065 ϵ [0, 1]

Cumple las condiciones de convergencia. Luego efectuando 3 iteraciones con x_0 = 0.625

i	x_i	$g(x_i)$
0	0.625	0.7316156
1	0.7316156	0.693636
2	0.693636	0.7069339
3	**0.7069339**	

Solución del Problema3

a)

$$f(x) = 6\sqrt{1-x}$$

$$f'(x) = -\frac{3}{\sqrt{1-x}}$$

$$A_S = 2\pi\int_0^1 6\sqrt{1-x}\sqrt{1+\frac{9}{1-x}}dx = \int_0^1 12\pi\sqrt{10-x}dx$$

Método de Simpson

$$F(x) = 12\pi\sqrt{10-x}$$

$$A_S \approx \frac{1-0}{6}\left[F(0) + 4F(0.5) + F(1)\right] = 116.1830$$

b)

$$F(x) = 12\pi\sqrt{10-x}$$

$$F'(x) = -6\pi\frac{1}{\sqrt{10-x}}$$

$$F''(x) = 3\pi\frac{1}{\sqrt{(10-x)^3}}$$

$$\frac{3\pi}{\left(\sqrt{10}\right)^3} \leq 3\pi\frac{1}{\sqrt{(10-x)^3}} \leq \frac{\pi}{9}$$

$$E \leq \frac{(1-0)^3}{12n^2}\mathrm{Max}_{0\leq x\leq 1}\left|3\pi\frac{1}{\sqrt{(10-x)^3}}\right|$$

$$E \leq \frac{1}{12n^2}\times\frac{\pi}{9} \leq 0.0001$$

$$n \geq 17{,}0294$$

18 es el menor valor para **n** .

c) .

```
F=inline('12*pi*sqrt(10-x)')
h=(1-0)/6
x=[0:h:1]
xpar=x(2:2:end-1)
ximpar=x(3:2:end-1)
As=(h/3)*(F(0)+4*sum(F(xpar))+2*sum(F(ximpar))+F(1))
```

Solución del Problema 4

a)

$$t^{(n+1)} = t^{(n)} + \Delta t$$

$$H_1^{(n+1)} = H_1^{(n)} + \Delta t\,\frac{Q_1 - \alpha_1\sqrt{H_1^{(n)}} - \alpha_3 sign\left(H_1^{(n)} - H_2^{(n)}\right)\sqrt{\left|H_1^{(n)} - H_2^{(n)}\right|}}{A_1}$$

$$H_2^{(n+1)} = H_2^{(n)} + \Delta t\,\frac{Q_2 - \alpha_2\sqrt{H_2^{(n)}} + \alpha_3 sign\left(H_1^{(n)} - H_2^{(n)}\right)\sqrt{\left|H_1^{(n)} - H_2^{(n)}\right|}}{A_2}$$

t	H_1	H_2
0	5	10
1	6.1608	11.8157
2	7.3224	13.6174

b)

```
% tanques acoplados
clc, clear all
Alfa1=20, Alfa2=30, Alfa3=40
A1=900, A2=1000
t(1)=0; H1(1)=5; H2(1)=10;
Q1=1000; Q2=2000; h=1;
for i=1:2
    t(i+1)=t(i)+h;
    signo=sign(H1(i)-H2(i));
    H1(i+1)=H1(i)+h*(Q1-Alfa1*sqrt(H1(i))-signo*Alfa3*sqrt(abs(H1(i)-H2(i))))/A1;
    H2(i+1)=H2(i)+h*(Q2-Alfa2*sqrt(H2(i))+signo*Alfa3*sqrt(abs(H1(i)-H2(i))))/A2;
end
disp([t' H1' H2'])
```