UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA — P.A. 2014-1
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA — 16/05/2014
DACIBAHCC

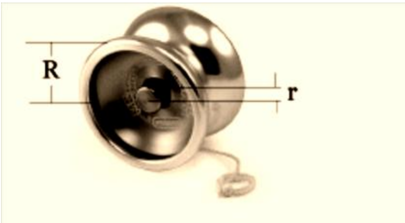
# EXAMEN PARCIAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO Y CALCULADORA**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**
- **PROHIBIDO EL USO DE CELULARES U OTROS EQUIPOS DE COMUNICACION ELECTRONICA**
- **DURACION: 110 MINUTOS**

## Problema 1

La tensión T en una cuerda de yoyo en la figura es:

$$T = \frac{mgR}{2r^2 + R^2}$$




Donde $m$ es la masa del yoyo, $g$ es la aceleración de la gravedad, $R$ es el radio mayor y $r$ es el radio menor.

Considerando R=0.03 $\pm$ 0.001 (en m), r= 0.007 $\pm$ 0.001 (en m). Donde m=0.2 kg, g=9.8 m/s$^2$

a) **(0.5 pto)** Calcule el valor estimado de la Tensión
b) **(3 ptos)** Estime el error debido a la propagación en la función.
c) **(1.5 pto)** Desarrolle un script en Matlab que permita determinar la cantidad de cifras significativas que tiene el valor estimado en a)

## Problema 2

**(5 ptos)** En una granja se tienen 3 especies de aves. Cada ave de la especie 1 consume cada semana un promedio de una unidad del alimento 1, dos unidades del alimento 2 y dos unidades del alimento 3. Cada ave de la especie 2 consume cada semana un promedio de tres unidades del alimento 1, cuatro unidades del alimento 2 y cinco unidades del alimento 3. Para un ave de la especie 3 el consumo semanal promedio, es de dos unidades del alimento 1, una unidad del alimento 2 y cinco unidades del alimento 3. Cada semana se proporciona a la granja 25000 unidades del alimento 1, 30000 unidades del alimento 2 y 55000 unidades del alimento 3. Si se supone que todo el alimento es ingerido. Usando el método de factorización de Crout, halle el número de aves de cada especie que pueden coexistir en la granja.

## Problema 3

La frecuencia natural P para una barra elástica de Longitud L que esta fija en un lado y enclavada en el otro lado, obedece a la relación: $\tan(KL) = \tanh(KL)$, donde P=K$^2$C

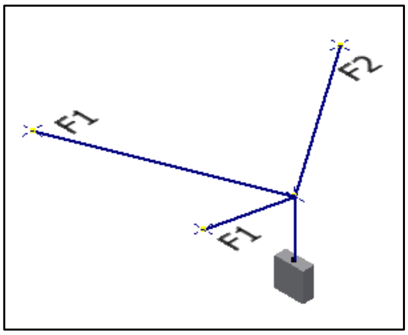
( C depende en cierta medida de la barra)

Usando el método de Newton Raphson, se pide:

a) **(2.5 ptos)** Encontrar la solución para la relación anterior si KL = x, y xo =4
b) **(2.5 ptos)** ¿Qué pasa si xo =7? Comete su respuesta.
Nota: Hacer como mínimo 02 iteraciones en cada caso

## Problema 4

En un sistema de cuerdas que sostiene una masa m, la tensión en cada una se calculan con el siguiente sistema de ecuaciones:




$$5F_1 + 3F_2 + F_3 = 1$$

$$F_1 - 3F_2 - F_3 = 2$$

$$F_1 + F_2 - 3F_3 = 1$$

Resuelva lo siguiente:

a) **(1 pto)** Verifique si el sistema de ecuaciones tiene solución única.
b) **(1 pto)** Verifique si el sistema converge para el método iterativo de Jacobi.
c) **(1.5 ptos)** Calcule los valores de las fuerzas en la segunda iteración usando el método anterior partiendo del vector nulo.
d) **(1.5 ptos)** Desarrolle una función que verifique si un sistema de ecuaciones converge para el método iterativo de Gauss-Seidel

**Los Profesores**

**Solución 1**

**a)** T=58.9178

**b)** Hallando las derivadas parciales:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{4mgrR}{\left(2r^2 + R^2\right)^2} \Big|_{(0.007,0.03)} = -1653$$

$$\frac{\partial T}{\partial R} = \frac{mg(2r^2 - R^2)}{\left(2r^2 + R^2\right)^2} \Big|_{(0.007,0.03)} = -1578$$

Como $\varepsilon_r = 0.001; \qquad \varepsilon_R = 0.001$

$$\varepsilon_T = |-1653| * 0.001 + |-1578| * 0.001 = 3.2312$$

**c)**

```
clc
m=0.2
g=9.8
syms r R
T=inline(' (0.2*9.8*R)/(2*r^2+R^2) ','r','R')
T(0.007,0.03)
dTr=-(4*m*g*0.007*0.03)/(2*(0.007)^2+(0.03)^2)^2
dTR=(m*g*(2*(0.007)^2-(0.03)^2))/(2*(0.007)^2+(0.03)^2)^2
er=0.001
eR=0.001
eT=abs(dTr)*er+abs(dTR)*eR

n=0;
while eT<=5*10^-n
 n=n+1;
end
n=n-1;
fprintf('La cantidad de cifras siginificativas es %d\n',n);
```

**Solución 2**

x = N° de aves de la especie 1

y = N° de aves de la especie 2

z = N° de aves de la especie 3

| | | Consumo 1 | Consumo 2 | Consumo 3 |
|---|---|---|---|---|
| ave 1 | | 1x | 2x | 2x |
| ave 2 | | 3y | 4y | 5y |
| ave 3 | | 2z | 1z | 5z |
| TOTAL | | 25000 | 30000 | 55000 |

Entonces:

x + 3y + 2z = 25000

2x + 4y + 1z = 30000

2x + 5y + 5z = 55000

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25000 \\ 30000 \\ 55000 \end{pmatrix}$$

Por factorización de Crout:

L*U = A

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 5/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$L\,z = b \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 5/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25000 \\ 30000 \\ 55000 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25000 \\ 10000 \\ 6000 \end{pmatrix}$$

También:

$$U\,X = z \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25000 \\ 10000 \\ 6000 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10000 \\ 1000 \\ 6000 \end{pmatrix}$$

**Solución 3**

Ecuación: f(x) = tan(x) - tanh(x)

$\Delta$x =0.01

f ' (x) ≈ (f(x+$\Delta$x) - f(x)) / $\Delta$x

algoritmo:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

a)

n= 0, x= 4 y = 0.158492 yd =2.36672 error = 0.0669670

n= 1, x=3.93303 y = 0.0129248 yd =2.04372 error = 0.0063242

n= 2, x=3.92671

b)

n= 0, x= 7.00000 y = -0.128550 yd =1.77495 error = -0.0724250

n= 1, x= 7.07242 y = 0.007714 yd =2.03607 error = 0.00378873

n= 2, x= 7.06864

Ambos casos convergen a 2 c.d.e en 2 iteraciones.

**Solución 4**

a) Las matrices a analizar:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{Aampliada} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Por simple inspección se puede notar que cada fila es linealmente independiente por lo tanto el rango en ambos casos es 3 y por consiguiente, tiene solución única.

b) Se verifica que la matriz A es estrictamente diagonal dominante, por lo tanto el sistema converge.

c) Para el sistema Jacobi
T=inv(D)*(L+U)
c=inv(D)*b

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -0.6 & -0.2 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} 0.2 \\ -2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

Aplicando X=TX+c

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ -2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 2/3 \\ -22/45 \\ -22/45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.666 \\ -0.4888 \\ -0.4888 \end{bmatrix}$$

d) El sistema de ecuaciones es:

```
Function converge=gauss_seidel(A,b)
D=diag(diag(A));
L=-tril(A,-1);
U=-triu(A,1);
T=inv(D-L)*U;
c=inv(D-L)*b;
ro=max(abs(eig(T)));
if ro<1
    converge=1
else
    converge=0
end
```