UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA P.A. 2013-2
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA 21/12/2013
DACIBAHCC

EXAMEN SUSTITUTORIO DE METODOS NUMERICOS (MB536)

- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO Y CALCULADORA**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**
- **PROHIBIDO EL USO DE CELULARES U OTROS EQUIPOS DE COMUNICACION ELECTRONICA**
- **DURACION: 110 MINUTOS**

Problema 1

En una fábrica de ropa se producen tres estilos de camisas que llamaremos 1, 2, 3. Cada prenda pasa por el proceso de cortado, cosido, planchado y empaquetado. Las camisas se elaboran por lote. Para producir un lote de camisas del tipo 1, se necesitan 30 min. para cortarlas, 65 min para coserlas y 30 min para plancharlas y empaquetarlas. Para el tipo 2, 50 min. para cortarlas, 20 min para coserlas y 10 min para plancharlas y empaquetarlas. Para el tipo 3, 15 min para cortar, 40 min para coser y 50 min para planchar y empaquetar. Se desea saber: Cuántos lotes se pueden producir si se trabajan 470 minutos en cortar, 680 minutos en coser y 380 minutos en planchar y empaquetar.

a) **(1 pto)** Presente el sistema a resolver.

b) **(1.5 ptos)** Analice la convergencia del sistema para Gauss-Seidel.

c) **(2.5 ptos)** Realice 03 iteraciones de Gauss-Seidel a partir del vector nulo. Si no fuera convergente transfórmelo en un sistema equivalente donde si lo sea.

Problema 2

Sea el modelo no lineal de un sistema de dos tanques acoplados donde se desea controlar los niveles H, regulando los caudales Q:

$$A_1 \frac{dH_1}{dt} = Q_1 - \alpha_1\sqrt{H_1} - \alpha_3\sqrt{H_1 - H_2}$$
$$A_2 \frac{dH_2}{dt} = Q_2 - \alpha_2\sqrt{H_2} + \alpha_3\sqrt{H_1 - H_2}$$

Siendo los caudales de entrada Q_1=67.5 cm^3/s y Q_2=13.5 cm^3/s, las áreas de cada tanque A_1=A_2=32 cm^2, y constantes experimentales α_1=α_2=14.30 y α_3=20.
Se desea determinar el punto de equilibrio **(H_1, H_2)**, el cual se dá cuando el sistema alcanza un estado estacionario adoptando los tanques un nivel constante.

a) **(3.5 ptos)** Partiendo de la aproximación inicial $\boldsymbol{H_1^{(0)}=6}$ **y** $\boldsymbol{H_2^{(0)}=}$ 5 aplique Newton-Raphson para sistemas hasta alcanzar una precisión de 1e-5.

b) **(1.5 ptos)** Escriba un programa en MATLAB para resolver la parte a)

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA — P.A. 2013-2
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA — 21/12/2013
DACIBAHCC

Problema 3

Para el cálculo de una curva parametrizada $C : \vec{r}(t) = (x(t), y(t)), \qquad t \in [a,b]$,

Se utiliza la fórmula: $$L = \int_a^b \left\| \vec{r}\,'(t) \right\| dt$$.

Encuentre el valor de b, si al calcular la longitud de la curva y = sen(x), desde x=0 a x=bπ/2 es 15 u. Para ello:

a) **(2.5 ptos)** Use la cuadratura de Gauss- Legendre con n = 3, para hallar la fórmula de iteración

b) **(2.5 ptos)** Use el método de Newton Raphson con una tolerancia de 10^{-3} para hallar el valor de b, utilizando la fórmula de iteración.

TABLA DE GAUSS LEGENDRE

N	Xi	Ci
3	-0.774596669	0.555555555
	0.0	0.888888888
	+0.774596669	0.555555555

Problema 4

En la Fig. 1, la ecuación que gobierna un péndulo debido al efecto de la gravedad es:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} Sen(\theta) = 0$$

Considerando que la bolilla es soltada desde θ=π/3 rad, g=9.81 m/s^2, L=1 m. Se desea calcular lo siguiente:

a) **(2.5 ptos)** Determine la posición angular en el instante 3 segundos usando un paso de 1 segundo con el método de Euler progresivo.

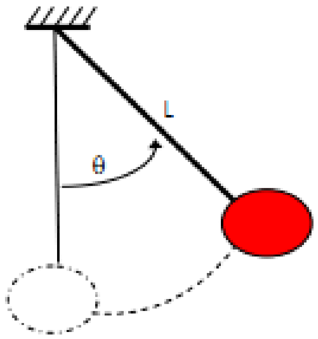

Fig. 1 Péndulo

b) **(2.5 ptos)** Determine la velocidad angular en el instante 1 segundo usando un paso de 1 segundo con el método de Runge-Kutta Orden 4

Los Profesores

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA **P.A. 2013-2**
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA **21/12/2013**
DACIBAHCC

Solucionario del Examen Sustitutorio MB536 – 2013-2

Problema 1

a)
Sea X el número de lotes de camisas del tipo 1 que se pueden producir.
Sea Y el número de lotes de camisas del tipo 2 que se pueden producir.
Sea Z el número de lotes de camisas del tipo 3 que se pueden producir.

luego el sistema a resolver es:

	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3		
Corte	30X	50Y	15Z	=	470
Costura	65X	20Y	40Z	=	680
Planchado y Empaquetado	30X	10Y	50Z	=	380

b) $$\boldsymbol{T_{GS}} = \begin{pmatrix} 0 & -5/3 & -1/2 \\ 0 & 65/12 & -3/8 \\ 0 & -1/12 & 3/8 \end{pmatrix}$$

$$\rho(T_{GS}) = 5.4229 > 1$$

No hay convergencia

c) Permutando filas de tal manera que exista diagonal estrictamente dominante

65X+20Y+40Z=680

30X+50Y+15Z=470

30X+10Y+50Z=380

$$\boldsymbol{T_{GS}} = \begin{pmatrix} 0 & -4/13 & -8/13 \\ 0 & 12/65 & 9/130 \\ 0 & 48/325 & 231/650 \end{pmatrix}$$

$$C_{GS} = \begin{pmatrix} 136/113 \\ 203/65 \\ 227/325 \end{pmatrix}$$

$$x0 = [0;0;0]$$
$$x1 = T_G * x0 + C_{GS} = (1.4615; 3.1231;\ 0.6985)$$
$$\text{x}2 = T_G * x1 + C_{GS} = (\ 9.0708; 3.7480; 1.4072)$$
$$\text{x}3 = T_G * x2 + C_{GS} = (8.4419;\ \ 3.9125;\ 1.7524)$$

Problema 2

Siendo H1 y H2 constantes y reemplazando:

$$f_1(H_1, H_2) = 67.5 - 14.30\sqrt{H_1} - 20\sqrt{H_1 - H_2} = 0$$
$$f_2(H_1, H_2) = 13.5 - 14.30\sqrt{H_2} + 20\sqrt{H_1 - H_2} = 0$$

Algoritmo:

$$H_1^{(0)} = 6$$
$$H_2^{(0)} = 5$$
$$\begin{bmatrix} -f_1 \\ -f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial f_1 / H_1 & \partial f_1 / H_2 \\ \partial f_2 / H_1 & \partial f_2 / H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta H_1 \\ \Delta H_2 \end{bmatrix}$$
$$H_1^{(i+1)} = H_1^{(i)} + \Delta H_1$$
$$H_2^{(i+1)} = H_2^{(i)} + \Delta H_2$$

**** Iteraciones ****

H1	H2	err
6.000000000000000	5.000000000000000	NaN
8.551042349089467	7.048455635979847	2.551042349089467
8.820866847250086	7.256015959811440	0.269824498160618
8.823015419974883	7.257525642207035	0.002148572724798
8.823015556653518	7.257525715434372	0.000000136678634

b) Programa

```
% Cálculo de puntos de equilibrio:
clc
clear all
syms Alfa1 Alfa2 Alfa3 H1 H2 A1 A2 Q1 Q2
f=[(Q1-Alfa1*sqrt(H1)-Alfa3*sqrt(H1-H2))/A1;(Q2-
Alfa2*sqrt(H2)+Alfa3*sqrt(H1-H2))/A2 ]
x=[H1 H2]
A=jacobian(f,x)
h1=6; h2=5;
acum=[h1 h2 NaN];
for i=1:4
    ff=-subs(f,{Q1,Q2,H1,H2,Alfa1,Alfa2,Alfa3,A1,A2},
              {67.5,13.5,h1,h2,14.30,14.30,20,32,32});
    AA=subs(A,{H1,H2,Alfa1,Alfa2,Alfa3,A1,A2},
              {h1,h2,14.30,14.30,20,32,32});
    dh=AA\ff;
    h1=h1+dh(1);
    h2=h2+dh(2);
    err=norm(dh,inf);
    acum=[acum;h1 h2 err];
end
disp(acum)
```

Problema 3

a) La ecuación de la curva parametrizada es:

$$\vec{r}(t) = (t, sen\ t) \quad \Rightarrow \quad \|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{1+\cos^2 t}$$

$$L = \int_0^{b\pi/2} \sqrt{1+\cos^2 t}\ dt$$

Haciendo : $x = \frac{1}{2}\left(\frac{b\pi}{2}t + \frac{b\pi}{2}\right) = \frac{b\pi}{4}t + \frac{b\pi}{4} \qquad dx = \frac{b\pi}{4}dt$

$$\Rightarrow \quad L = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{b\pi}{4}t + \frac{b\pi}{4}\right). \quad \frac{b\pi}{4}dt$$

$$\Rightarrow \quad 15 = \frac{b\pi}{4}\left(\frac{5}{9}\sqrt{1+\cos^2\left(\frac{b\pi}{4}(1-0.77459)\right)} + \frac{8}{9}\sqrt{1+\cos^2\left(\frac{b\pi}{4}\right)} + \frac{5}{9}\sqrt{1+\cos^2\left(\frac{b\pi}{4}(1+0.77459)\right)}\right)$$

Como $\cos^2 x = (1+\cos 2x)/2$

$$\Rightarrow \quad 0 = b\pi\left(\frac{5}{9}\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{b\pi}{2}(0.22541)\right)} + \frac{8}{9}\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{b\pi}{2}\right)} + \frac{5}{9}\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{b\pi}{2}(1.77459)\right)}\right) - 60$$

$$\Rightarrow \quad f(x_n) = b\pi\left(\frac{5}{9}\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{b\pi}{2}(0.22541)\right)} + \frac{8}{9}\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{b\pi}{2}\right)} + \frac{5}{9}\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{b\pi}{2}(1.77459)\right)}\right) - 60$$

Aplicando Newton Raphson: $X_0 = 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

se tiene:

X_n	Error
6.7524	6.7524
7.4600	0.7075
8.2795	0.8196
8.0312	0.2484
8.0152	0.0159
8.0150	0.0002

Rpta: b = 8.015

Problema 4

Llevándolo a la forma matricial

$$\Theta = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad \dot{\Theta} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ -\frac{g}{L}\, sen(\theta) \end{bmatrix} \quad \dot{\Theta} = f(t,\Theta)$$

$$\Theta(0) = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{3} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta(0) \\ \dot{\theta}(0) \end{bmatrix}$$

$$\dot{\Theta} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ -9.81 sen(\theta) \end{bmatrix}$$

Aplicando la fórmula de Euler es:

$$\Theta(1) = \Theta(0) + \mathrm{h} * \mathrm{f}(\mathrm{t}, \Theta(0))$$

$$\Theta(1) = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + 1 * \begin{bmatrix} 0 \\ -9.81 sen\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0472 \\ -8.4957 \end{bmatrix}$$

$$\Theta(2) = \begin{bmatrix} 1.0472 \\ -8.4957 \end{bmatrix} + 1 * \begin{bmatrix} -8.4957 \\ -9.81 sen(1.0472) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.4485 \\ -16.9914 \end{bmatrix}$$

$$\Theta(3) = \begin{bmatrix} -7.4485 \\ -16.9914 \end{bmatrix} + 1 * \begin{bmatrix} -16.9914 \\ -9.81 sen(-7.4485) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24.4399 \\ -7.9768 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la posición angular será: -24.4399 rad

Aplicando RK4

```
k1=h*f(xi,yi)
k2=h* f(xi+h/2,yi+k1/2)
k3=h* f(xi+h/2,yi+k2/2)
k4=h* f(xi+h,yi+k3)
yi=yi+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
```

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -8.4957 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -4.2479 \\ -8.4457 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -4.2479 \\ 8.2368 \end{bmatrix}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} 8.0368 \\ -0.5791 \end{bmatrix}$$

$$\Theta(1) = \begin{bmatrix} -3.1301 \\ -4.3963 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la velocidad angular es de -4.3963 rad/seg