UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA **P.A. 2013-1**
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA **27/07/2013**
DACIBAHCC

EXAMEN SUSTITUTORIO DE METODOS NUMERICOS (MB536)

- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO Y CALCULADORA**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**
- **PROHIBIDO EL USO DE CELULARES U OTROS EQUIPOS DE COMUNICACION ELECTRONICA**
- **DURACION: 110 MINUTOS**

Problema 1

Sea el sistema AX= B, donde:

$$A=\begin{bmatrix} 110 & 30 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -15 & -55 & -15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 22 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 22 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -15 & -55 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 110 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Usando el Método de Jacobi:

a) (0.5 Ptos) Demostrar que el método es convergente.

b) (2.0 Ptos) Determine la fórmula de iteración simplificada para resolver el sistema, indicando la matriz de iteración y el vector de términos independientes.

c) (2.5 Ptos) Halle la solución, partiendo de un vector nulo y realizando iteraciones hasta que $\left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\|_2 \langle\, 0.01$.

Ayuda: Escale el sistema entre valores divisibles.

Busque simetría y reduzca el sistema a su mínimo orden

Aplique el algoritmo al modelo reducido.

Problema 2

Para determinar las fuerzas inerciales del modelo cinemático representado en la Fig. 1 se puede utilizar:

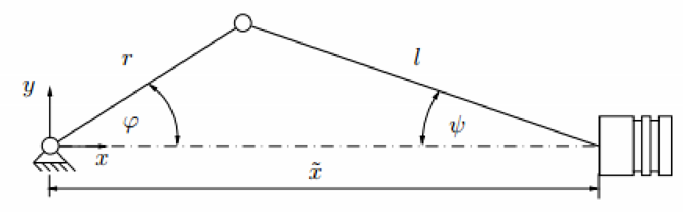

Fig 1 Cinemática del mecanismo de Manivela

Las siguientes relaciones cinemáticas se aplican:

$$\tilde{x} = r\cos(\varphi) + l\cos(\psi)$$
$$r\sin(\varphi) = l\sin(\psi)$$

Considere para la geometría dada: r=0.1 m y l=0.3 m

Determine con la ayuda del método de Newton Raphson los valores de los ángulos utilizando la relación cinemática dada anteriormente con el pistón en $\tilde{x} = 0.3\,m$ y considerando los valores iniciales de $\varphi_0 = 70^0$ y $\psi_0 = 15^0$. Se pide:

a) (1.0 Pto) Determine El sistema no lineal de la forma: $\begin{matrix} f_1(\varphi,\psi)=0 \\ f_2(\varphi,\psi)=0 \end{matrix}$.

b) (2.0 Ptos) Determine el algoritmo de Newton Raphson para resolver este problema.

c) (2.0 Ptos) Realice **dos iteraciones** usando los valores iniciales dados. El desarrollo será en forma detallada, indicando valores funcionales, valores de Jacobianos, y errores.
Ayuda: Trabaje en radianes
En la tercera iteración $\varphi_3 = 80.4059^0$ y $\psi_3 = 19.1881^0$

Problema 3

Un vehículo tiene una velocidad de $v(t) = 2/\sqrt{t}$ m/s, se desea conocer la distancia recorrida entre el instante 1s y 10s, para ello:

d) (2.0 Ptos) Determine la distancia, usando el método de Newton-Cotes cerrado de grado 2 con 5 puntos y su respectivo error.

e) (2.0 Ptos) Determine la distancia, usando el método de Gauss-Legendre con 2 puntos y su respectivo error.

f) (1.0 Pto) Desarrolle un script en Matlab que calcule la distancia por el método del trapecio usando 1000 puntos.

Problema 4

La resistencia aerodinámica al movimiento de un auto de masa 1000 Kg. es proporcional al cuadrado de su velocidad. Una resistencia friccional adicional es constante, tal que la Fuerza Resistiva puede ser escrita como $Fr=C_1+C_2V^2$, opuesta al desplazamiento, donde C_1=10000 y C_2=5000, donde C_1 y C_2 son constantes que dependen de la configuración mecánica del carro. Si el carro tiene una velocidad inicial de $Vo=1$ *m/s*, en el instante que el motor deja de funcionar:

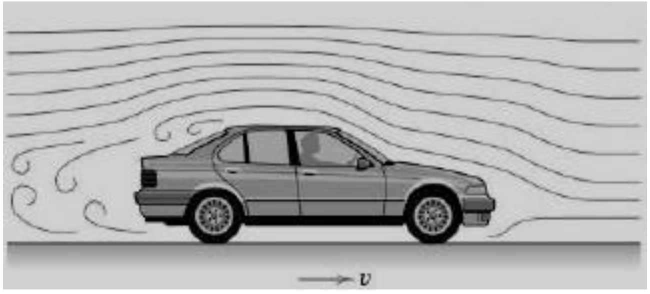

Fig 2

a) (0.5 Pts) Demostrar que la ecuación que gobierna el movimiento del auto es:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -C_1 - C_2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$
$$x(0)=0$$
$$\frac{dx}{dt}(0)=1$$

b) (3.0 Pts) Determine la distancia que recorre el auto hasta que se detiene y el tiempo trascurrido. Utilice el método de Euler con paso h=0.01 s.

c) (1.5 Pts) Escriba un programa MATLAB para la parte b)

Los Profesores

SOLUCIONARIO

SOLUCIÓN 1:

Simplificando se tiene:

$$\begin{aligned}
11x_1 + 3x_2 &= 1 \\
3x_1 + 11x_2 + 3x_3 &= -2 \\
3x_2 + 11x_3 + 3x_4 &= 5 \\
3x_3 + 11x_4 + 3x_5 &= 5 \\
3x_4 + 11x_5 + 3x_6 &= -2 \\
3x_5 + 11x_6 &= 1
\end{aligned}$$

Se observa que el sistema es simétrico por lo que: $x_1=x_6$; $x_2=x_5$; $x_3=x_4$

Luego tenemos:

$$\begin{aligned}
11x_1 + 3x_2 &= 1 \\
3x_1 + 11x_2 + 3x_3 &= -2 \\
3x_2 + 14x_3 &= 5
\end{aligned}$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 11 & 3 & 0 \\ 3 & 11 & 3 \\ 0 & 3 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Se observa que la matriz A es diagonalmente dominante por lo que el método converge; luego por el método de Jacobi y tomando $x^{(0)} = [0\ 0\ 0]^T$ se tiene:

Iteración	$x^{(k)}$	$\left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\|_2$
k=1	0.0909 -0.1818 0.3571	0.4109
k=2	0.1405 -0.3040 0.3961	0.1375
k=3	0.1738 -0.3282 0.4223	0.0488
k=4	0.1804 -0.3444 0.4275	0.0183
k=5	0.1848 -0.3476 0.4309	0.0065

Respuesta: $x_1 = x_6 = 0.1848$
$x_2 = x_5 = -0.3476$
$x_3 = x_4 = 0.4309$

SOLUCIÓN 2

a)
$$f_1(\varphi,\psi) = 0.30 - 0.1\cos(\varphi) - 0.3\cos(\psi) = 0$$
$$f_2(\varphi,\psi) = 0.1\sin(\varphi) - 0.3\sin(\psi) = 0$$

b) Algoritmo: $F = \begin{bmatrix} 0.3 - 0.1\cos(\varphi_k) - 0.3\cos(\psi_k) \\ 0.1\sin(\varphi_k) - 0.3\sin(\psi_k) \end{bmatrix}$ $\quad J = \begin{bmatrix} 0.1\sin(\varphi_k) & 0.3\sin(\psi_k) \\ 0.1\cos(\varphi_k) & -0.3\cos(\psi_k) \end{bmatrix}$

$$J\Delta x = -F \qquad \Delta x = \begin{bmatrix} \Delta\varphi_k \\ \Delta\psi_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{k+1} - \varphi_k \\ \psi_{k+1} - \psi_k \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \varphi_{k+1} \\ \psi_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_k \\ \psi_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\varphi_k \\ \Delta\psi_k \end{bmatrix}$$

c) Iteraciones 1: k=0

$$F = \begin{bmatrix} 0.30 - 0.1\cos(\varphi_0) - 0.3\cos(\psi_0) \\ 0.1\sin(\varphi_0) - 0.3\sin(\psi_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0240 \\ 0.0163 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 0.1\sin(\varphi_0) & 0.3\sin(\psi_0) \\ 0.1\cos(\varphi_0) & -0.3\cos(\psi_0) \end{bmatrix} = \begin{Vmatrix} 0.0940 & 0.0776 \\ 0.0342 & -0.2898 \end{Vmatrix}$$

$$J\Delta x = -F \qquad \Delta x = \begin{bmatrix} \Delta\varphi_0 \\ \Delta\psi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 - \varphi_0 \\ \psi_1 - \psi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1901 \\ 0.0788 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \psi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 \\ 15 \end{bmatrix} + 180/\pi \begin{bmatrix} 0.1901 \\ 0.0788 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80.8920^0 \\ 19.5131^0 \end{bmatrix}$$

Iteración 2:k =1

$$F = \begin{bmatrix} 0.30 - 0.1\cos(\varphi_1) - 0.3\cos(\psi_1) \\ 0.1\sin(\varphi_1) - 0.3\sin(\psi_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0014 \\ -0.0015 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 0.1\sin(\varphi_1) & 0.3\sin(\psi_1) \\ 0.1\cos(\varphi_1) & -0.3\cos(\psi_1) \end{bmatrix} = \begin{Vmatrix} 0.0987 & 0.1002 \\ 0.00158 & -0.2828 \end{Vmatrix}$$

$$J\Delta x = -F \qquad \Delta x = \begin{bmatrix} \Delta\varphi_1 \\ \Delta\psi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_2 - \varphi_1 \\ \psi_2 - \psi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0084 \\ -0.0057 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \psi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80.8920^0 \\ 19.5131^0 \end{bmatrix} + 180/\pi \begin{bmatrix} -0.0084 \\ -0.0057 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80.4084^0 \\ 19.1887^0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0.0940 & 0.0776 \\ 0.0342 & -0.2898 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} -0.0240 \\ 0.0163 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 80.8920^\circ \\ 19.5131^\circ \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0.0987 & 0.1002 \\ 0.0158 & -0.2828 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 0.0014 \\ -0.0015 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 80.4084^\circ \\ 19.1887^\circ \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0.0986 & 0.0986 \\ 0.0167 & -0.2833 \end{bmatrix}, R = 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.5110 \\ -0.1918 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 80.4059^\circ \\ 19.1881^\circ \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN 3

Solución:

a) La partición en t, seria:

Ci	ti
1.0000	1.0000
4.0000	3.2500
2.0000	5.5000
4.0000	7.7500
1.0000	10.0000

h=2.25

Aplicando la fórmula: ∑ ci*ti h/3

Distancia=8.73
Integral indefinida es: $4\sqrt{t}$
Integral exacta es: 8.6491
Error=0.0879

b) Para 2 puntos

Ci	xi
1.0000	-0.5774
1.0000	0.5774

Xi	f(xi)
2.9019	1.1741
8.0981	0.7028

Aplicando la formula ∑Ci*Fxi (b-a)/2
La integral aproximada es: 8.4459
Error=0.2032

c) Una posibilidad sería la siguiente

```
clc
a=1;b=10;
n=1000;
f='2./(x.^0.5)';
f=inline(f);
x=linspace(a,b,n);
h=(b-a)/(n-1);
y=f(x);
coef=(y*0+1)*2;
coef(1)=1;
coef(end)=1;
I=(h/2)*(y*coef')
```

SOLUCION 4

Solución

a)

$$m\,a = \sum F$$

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -C_1 - C_2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

$$x(0) = 0$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = 1$$

b) Reemplazando valores y transformando a sistema EDO:

$$\frac{dx}{dt} = v \qquad x(0) = 0$$

$$\frac{dv}{dt} = -10 - 5\,v^2 \qquad v(0) = 1$$

$t_0 = 0$
$x_0 = 0$
$v_0 = 1$

$h = 0.01$
$t_{i+1} = t_i + h$
$x_{i+1} = x_i + h\, v_i$
$v_{i+1} = v_i + h\left(-10 - 5\, v_i\right)$

T	X	V
0	0	1.0000
0.0100	0.0100	0.8500
0.0200	0.0185	0.7139
0.0300	0.0256	0.5884
0.0400	0.0315	0.4711
0.0500	0.0362	0.3600
0.0600	0.0398	0.2535
0.0700	0.0424	0.1503
0.0800	0.0439	0.0492
0.0900	0.0444	-0.0510

Rpta.- El auto se detiene aproximadamente cuando t=0.85 seg. y x=0.44 m

```
% es_20131.m
clc, clear all
t(1)=0;
x(1)=0;
v(1)=1;
h=0.01;
for i=1:100
    t(i+1)=t(i)+h;
    x(i+1)=x(i)+h*v(i);
    v(i+1)=v(i)+h*(-10-5*v(i)^2);
    if v(i+1)<0
        break
    end
end
disp([t' x' v'])
```