UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA **P.A. 2013-1**
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA **19/07/2013**
DACIBAHCC

EXAMEN FINAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO Y CALCULADORA**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**
- **PROHIBIDO EL USO DE CELULARES U OTROS EQUIPOS DE COMUNICACION ELECTRONICA**
- **DURACION: 110 MINUTOS**

Problema 1

Un camión de arena en proceso de descarga, esta sobre una balanza electrónica que registra el peso en cada instante de tiempo, generando la siguiente tabla:

Tiempo (s)	0	1	1.9	2.7
Peso (kg)	20000	17530	15500	11534

Calcule lo siguiente, indicando claramente el procedimiento y sus resultados parciales:

a) **(2 ptos)** Determine el peso en el instante 0.5s usando el polinomio de interpolación de Lagrange de segundo grado.

b) **(2 ptos)** Determine el peso en el instante 2.3s usando spline cubico natural.

c) **(1 pto)** Mediante un spline cubico natural determine la razón de cambio del peso en el instante 2.3s expresado en kg/s.

Problema 2

Determine la longitud de la elipse cuya ecuación es de la forma: $4x^2 + 9y^2 = 36$

a) **(2 ptos)** Utilizando la regla de Simpson 1/3 (para n = 4)

b) **(2 ptos)** Utilizando la cuadratura de Gauss Legendre (n = 3)

c) **(1 pto)** Que respuesta final daría Ud. para la longitud de la elipse

TABLA DE GAUSS LEGENDRE

N	Zi	Ci
3	-0.774596669	0.555555555
	0.0	0.888888888
	+0.774596669	0.555555555

Nota: Longitud de la elipse: $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}\, dt$

Problema 3

Un cohete de masa m=500 Kg es lanzado verticalmente hacia arriba (eje y) con una velocidad inicial v_0=200 m/s y teniendo en cuenta que existe una fuerza de rozamiento viscosa que se opone al movimiento de la forma $-2\beta\,\dot{y}$, si $\beta = 250$:

a) **(0.5 ptos)** Demostrar que la ecuación diferencial que gobierna el movimiento del cohete es: $\ddot{y} = -g - \frac{2\beta}{m}\dot{y} \quad y(0) = 0 \quad \dot{y}(0) = v_0$, siendo ***g=9.8 m/s²*** la aceleración de la gravedad.

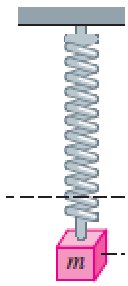
b) **(2.0 ptos)** Calcular la posición y velocidad que alcanza el cohete en t=1 seg., transforme la ecuación en un sistema de primer orden y resuelva aplicando Taylor de segundo orden usando un paso de h=0.25 seg.

c) **(1.0 Pto)** Si la solución analítica es $y(t) = -\frac{mg}{2\beta}t + C_1 + C_2 e^{-2\frac{\beta}{m}t}$ determine el error cometido en b)

d) **(1.5 Pts)** Escriba un programa MATLAB para resolver b)

Problema 4

Un resorte vertical con constante de 2 lb/pie tiene suspendida una masa de 1/2 slug, está sometido a un movimiento armónico simple. Si inicialmente se encuentra en la posición de equilibrio y al cabo de t=1 min se encuentra a 5 unidades por debajo de la posición de equilibrio:



$$(1/2)y''(t) - 2y(t) = 0; \qquad 0 \le t \le 1,\ y(0) = 0, \quad y(1) = 5$$

a) **(3 ptos)** Formule las ecuaciones o algoritmo de las diferencias finitas en forma detallada con h = $\frac{1}{4}$.

b) (1 pto) Resuelva el sistema de ecuaciones lineales y compare con la solución exacta. $y(x) = 5\sinh(2x)/\sinh(2)$.

c) (1 pto) Implementar un script en Matlab que resuelva (a) y (b)

Los Profesores

SOLUCIONARIO
Solución Problema 1

Parte a)

i		xi	yi	dLi	yi/dLi
0		0	20000	1.9	10526.3158
1		1	17530	-0.9	-19477.7778
2		1.9	15500	1.71	9064.32749

Por lo tanto el polinomio de interpolación de lagrange es:
P(x)=10526.3158(x-1)(x-1.9)-19477.778(x-0)(x-1.9)+9064.32(x-0)(x-1)
P(0.5)= 18736.7857 kg

Parte b)
Preparando la tabla de valores

i	**x**	**y**	hi	y[xi,xi+1]
0	0	20000	1	-2470
1	1	17530	0.9	-2255.557
2	1.9	15500	0.8	-4957.5
3	2.7	11534		

Ordenando para resolver el sistema de ecuaciones para hallar las M
Considerando spline cubico natural M0 y M3 =0

H

3.8	0.9
0.9	3.4

M

M1
M2

Y

1286.66667
-16211.667

Resolviendo

M0	0
M1	1566.074869
M2	-5182.686485
M3	0

PSi=ai(x-xi)^3+bi(x-xi)^2+ci(x-xi)+di

	a	**b**	**c**	**d**
p0	261.012478	0	-2731.0125	20000
p1	-1249.7706	783.037435	-1947.975	17530
p2	1079.72635	-2591.3432	-3575.4503	15500

P2(2.3)= 13724.3075 kg

Parte c)
a) Derivando el polinomio P2 y evaluando en 2.3
P2'(2.3)= -5130.2562 kg/s

Solución Problema 2

Haciendo el cambio de variable:

x = 3 cos t ; y = 2 sen t

Entonces: $$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}\ dt$$

$$\Rightarrow L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-3sen(t))^2 + (2\cos(t))^2}\ dt$$

$$\Rightarrow L = \int_0^{2\pi} \sqrt{5sen^2(t) + 4}\ dt$$

a) Aplicando Simpson 1/3 para n = 4

L = 16.7552

b) Aplicando Gauss Legendre para n = 3

L = 14.2171

c) $L_{\text{aproximada final}}$ = (16.7552 + 14.2171)/2 = 15.4861

(Valor real de la longitud por integración = 15.8655)

Solución Problema 3

a) Segunda Ley de Newton:

$$\sum F = m\ddot{y}$$

$$-mg - 2\beta\,\dot{y} = m\ddot{y}$$

$$-g - \frac{2\beta}{m}\dot{y} = \ddot{y} \quad y(0) = 0 \quad \dot{y}(0) = v_0$$

b) Transformando a sistema de primer orden:

$$\dot{y} = v \quad y(0) = 0$$

$$\dot{v} = -g - \frac{2\beta}{m}v \quad v(0) = 0$$

$$\ddot{y} = -g - \frac{2\beta}{m}v$$

$$\ddot{v} = -\frac{2\beta}{m}\left(-g - \frac{2\beta}{m}v\right)$$

Taylor de segundo orden:

$$t_0 = 0$$
$$y_0 = 0$$
$$v_0 = 200$$
$$h = 0.25$$
$$t_{n+1} = t_n + h$$
$$y_{n+1} = y_n + h\,v_n + \frac{h^2}{2}\left(-g - \frac{2\beta}{m}v_n\right)$$
$$v_{n+1} = v_n + h\left(-g - \frac{2\beta}{m}v_n\right) + \frac{h^2}{2}\left(-\frac{2\beta}{m}\right)\left(-g - \frac{2\beta}{m}v_n\right)$$

n	T	Y	V
0	0	0	200.0000
1	0.2500	43.4438	154.1063
2	0.5000	76.8482	118.2518
3	0.7500	102.4096	90.2404
4	1.0000	121.8434	68.3566

c) Aplicando las condiciones iniciales:

$$y(t) = -9.8*t + 209.8 - 209.8*e^{-t}$$

Y(1)= 122.8189 (ey = 0.9755)
V(1)= 67.3811 (ev = 0.9755)

d) Programa

```
% ef_2013_1.m
clc
clear all
m=500
beta=250
g=9.8
t(1)=0
y(1)=0
v(1)=200
h=0.25
for i=1:4
   t(i+1)=t(i)+h;
   y(i+1)=y(i)+h*v(i)+h^2/2*(-g-2*beta*v(i)/m);
   v(i+1)=v(i)+h*(-g-2*beta*v(i)/m)+
         h^2/2*(-2*beta/m)*(-g-2*beta*v(i)/m);
end
disp([t' y' v'])
```

Solución Problema4

(a) La ecuación de diferencias

$$y_{i+1} - 2.25y_i + y_{i-1} = 0$$

$$x_1 = 0 + \frac{1}{4}; \quad x_2 = 0 + \frac{2}{4}, \quad x_3 = 0 + \frac{3}{4}, \quad i = 1,2,3$$

$$y_2 - 2.25y_1 + y_0 = 0$$

$$y_3 - 2.25y_2 + y_1 = 0$$

$$y_4 - 2.25y_3 + y_2 = 0$$

$$y_0 = 0; y_4(1) = 5$$

(b) $y_1 = 0.7256, \quad y_2 = 1.6327, \quad y_3 = 2.9479$

error =[0.0072 0.0126 0.0125]

(c)

```
y=dsolve('D2y=4*y','y(0)=0','y(1)=5','x')
xx=0:0.25:1;
yy=subs(y,xx);
xx' yy']
```