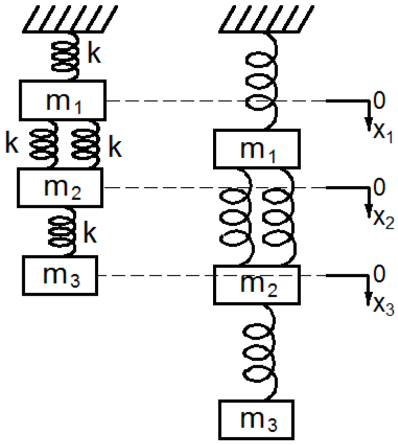
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA — P.A. 2012-2
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA — 22/12/2011
DACIBAHCC

EXAMEN SUSTITUTORIO DE METODOS NUMERICOS (MB536)

- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO Y CALCULADORA**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**
- **PROHIBIDO EL USO DE CELULARES U OTROS EQUIPOS DE COMUNICACION ELECTRONICA**
- **DURACION: 110 MINUTOS**

Problema 1

Se tiene 3 bloques con diferentes masas, sostenidas mediante 4 resortes según el siguiente esquema:



La relación entre las masas y los desplazamientos(x_i) se da por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$3kx_1 - 2kx_2 = m_1 g$$
$$-2kx_1 + 3kx_2 - kx_3 = m_2 g$$
$$-kx_2 + kx_3 = m_3 g$$

Considerando m_1=2kg, m_2=3kg, m_3=2.5kg, k=10kg/s^2 y g=9.81 m/s^2, determine lo siguiente:

a. **(2 ptos)** Calcule los desplazamientos usando el método de eliminación Gaussiana.

b. **(3 ptos)** Calcule los desplazamientos usando el método Gauss-Seidel y Jacobi en la primera iteración, partiendo de X_0=[1 1 1]. Indique cual se acerca más a la respuesta correcta.

Problema 2

a. **(1 pto.)** Demuestre que para encontrar la raíz ***r-ésima*** de un número ***a***, la fórmula iterativa del método de Newton-Raphson puede expresarse como:

$$x_{n+1} = \frac{1}{r}\left[(r-1)\,x_n + \frac{a}{x_n^{\,r-1}}\right]$$

b. **(2.5 pto.)** Como aplicación del algoritmo anterior, calcular $25^{1/3}$ con una precisión de 10^{-8}, empezar en valor inicial de 3.

c. **(1.5 pto.)** Escriba un programa Matlab para resolver a) con una precisión TOL y un máximo de MAXITE iteraciones.

Problema 3

La función de Debye es utilizada en termodinámica en el cálculo del calor específico del agua a volumen constante en ciertas sustancias. La función es expresada por:

$$D(x) = \frac{3}{x^3}\int_0^x \frac{y^3}{e^y - 1}dy$$

Obtener D(x) con un error menor a $0.5\text{x}10^{-5}$.

a. **(2.5ptos)**¿Cuál es la cuadratura de newton cotes que usaría? ¿Cuántos intervalos o puntos escogería para cumplir las exigencias pedidas? Aproxime $D(0.5)$.

b. **(2.5 ptos)** Cuál es el error cometido, cumple dentro de la tolerancia exigida?

Nota $\left|f^{iv}(\xi)\right| \leq 45$**,** $\left|f^{vi}(\xi)\right| \leq 20.2$**, considerando** $f(y) = \frac{3}{0.5^3}\left(\frac{y^3}{e^y - 1}\right)$

Problema 4

Sea la ecuación diferencial de tercer orden.

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = f(t); \qquad y''(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y(0) = 2$$

t	0	0.1	0.2
f(t)	2.5	2.7	2.8

a. **(1 pto)** Plantee el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

b. **(3 ptos)** Aproximar y(0.2) aplicando Runge Kutta de orden 2 con h=0.1.

c. **(1 pto)** Determine el error si la solución analítica es

$$y = \left(-\frac{19}{2}t + \frac{9}{4}t^2 + \frac{33}{2}\right)e^t - \frac{29}{2} - 6t - t^2$$

Los Profesores

SOLUCIONARIO

Problema 1

a) Aplicando eliminación Gaussiana, el sistema se transforma en:

Matriz ampliada Ab=

30.0000	-20.0000	0	19.6200
-20.0000	30.0000	-10.0000	29.4300
0	-10.0000	10.0000	24.5250

Operaciones elementales

F2=f2+(2/3)*f1

30.0000	-20.0000	0	19.6200
0	16.6667	-10.0000	42.5100
0	-10.0000	10.0000	24.5250

F3=f3+(10/16.6667)*f2

30.0000	-20.0000	0	19.6200
0	16.6667	-10.0000	42.5100
0	0	4.0000	50.0310

Sustitución regresiva

X= 7.3575 10.0552 12.5078

b) Calculando para los métodos iterativos

En la primera iteracion

Xjacobi= 1.3207 1.9810 3.4525

Xgauss= 1.3207 2.1947 4.6472

Por simple inspeccion se verifica que el mas cercano es Xgauss

Problema 2

$$f(x) = a - x^r$$

a) $f'(x) = -r\, x^{r-1}$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{a - x_n^{\,r}}{-r\, x_n^{\,r-1}}$$

Ordenando:

$$x_{n+1} = \frac{1}{r}\left[(r-1)\, x_n + \frac{a}{x_n^{\,r-1}}\right]$$

b) a=25

r=3

n	***xn***	***Err***
0	***3.000000000000000***	***-------***
1	***2.925925925925926***	***0.074074074074074***
2	***2.924018982396379***	***0.001906943529547***
3	***2.924017738213395***	***0.000001244182983***
4	***2.924017738212866***	***0.000000000000529***

c)

```
% NR_raiz_enesima.m
a=input('Ingrese numero a=')
r=input('Ingrese radical r=')
TOL=input('Ingrese precision TOL=')
MAXITE=input('Ingrese Máximo Número de iteraciones=')
```

```
x0=3; acum=[x0 NaN];
for i=1:MAXITE
      x1=1/r*((r-1)*x0+a/x0^(r-1));
      err=abs(x1-x0);
      acum=[acum;x1 err];
      x0=x1;
      if err<TOL
          break
      end
end
disp(acum)
```

Problema 3

Se escogería la cuadratura de Newton cotes Abierta o Gauss – Legendre, porque la integral es singular en uno de sus extremos.
Escogiendo Simpson abierta.

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = \frac{4h}{3}\left(2f(x_1) - f(x_2) + 2f(x_3)\right) + \frac{14h^5}{45} f^{(4)}(\varepsilon) \quad donde\ x_0 < \varepsilon < x_4$$

De la fórmula del error para una parábola abierta h≤ $\left(\frac{4*0.5e-5}{14(0.5)}\right)^{1/4} = 0.041$

N=13 intervalos , como se tiene que elegir N=4M y M son parábolas abiertas , se elige N=16 intervalos (4 parábolas abiertas)
h=0.5/16=0.03125

$$\int_0^{0.5} f(y)dx = \frac{4h}{3}(2f_1 - f_2 + 2f_3 + 2f_5 - f_6 + 2f_7 + 2f_9 - f_{10} + 2f_{11} + 2f_{13} - f_{14} + 2f_{15}) = 0.824961$$

Error = 4*(14h^5)=0.167*10^-5 cumple con las exigencias pedidas.

Problema 4

(a)

$$\frac{du1}{dt} = u2, \quad \frac{du2}{dt} = u3, \quad \frac{du3}{dt} = 3u3 - 3u2 + u1 + f(t)$$

(b) Iteración 1

$$k1 = 0.1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3(0) - 3(1) + 2 + 2.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0.15 \end{pmatrix} \Rightarrow Y0 + k1 = \begin{pmatrix} 2.1 \\ 1 \\ 0.15 \end{pmatrix}$$

$$k2 = 0.1\begin{pmatrix} 1 \\ 0.15 \\ 3(0+0.15) - 3(1+0) + (2+0.1) + 2.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.015 \\ 0.225 \end{pmatrix}$$

$$Y(0.1) \approx Y1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.5\left(\begin{pmatrix} 2.1 \\ 1 \\ 0.15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.015 \\ 0.225 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2.1 \\ 1.075 \\ 0.1875 \end{pmatrix}$$

Iteración 2

$$k1 = 0.1\begin{pmatrix} 1.075 \\ 0.1875 \\ 3(0.1875) - 3(1.075) + 2.1 + 2.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1075 \\ 0.01875 \\ 2.1375 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Y1 + k1 = \begin{pmatrix} 2.1 + 0.1075 \\ 1.075 + 0.01875 \\ 0.1875 + 2.1375 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.2075 \\ 1.09375 \\ 2.325 \end{pmatrix}$$

$$k2 = 0.1\begin{pmatrix} 1.09375 \\ 2.325 \\ 3(2.325) - 3(1.09375) + (2.2075) + 2.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1094 \\ 0.2325 \\ 0.8701 \end{pmatrix}$$

$$Y(0.2) \approx Y2 = \begin{pmatrix} 2.1 \\ 1.075 \\ 0.1875 \end{pmatrix} + 0.5\left(\begin{pmatrix} 0.1075 \\ 0.01875 \\ 2.1375 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.1094 \\ 0.2325 \\ 0.8701 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2.2085 \\ 1.2006 \\ 1.6913 \end{pmatrix}$$

$$y(0.2) \approx 2.2085$$
$$y'(0.2) \approx 1.2006$$
$$y''(0.2) \approx 1.6913$$

(c)
f(t) = ((-19/2)*t+(9/4)*t^2+(33/2))*exp(t)-(29/2)-6*t-t^2
error=| 2.2024-2.2085|=0.0061