UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA **P.A. 2012-2**
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA **19/10/2011**
DACIBAHCC

EXAMEN PARCIAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO Y CALCULADORA**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**
- **PROHIBIDO EL USO DE CELULARES U OTROS EQUIPOS DE COMUNICACION ELECTRONICA**
- **DURACION: 110 MINUTOS**

Problema 1

Cuando un objeto gira alrededor de un punto, se cumple que : $Fc = \omega^2 mR$
Se tomaron las siguientes mediciones:

- Fuerza centrípeta (Fc) = 4 kN con 1% de precisión
- Masa(m) = 20 kg con una aproximación de ±0.5 kg
- Distancia hacia el centro R =2 m con 2% de precisión

a) **(0.5 ptos)** Calcule el valor aproximado de la velocidad angular (ω) en rad/s
b) **(2 ptos)** Calcule el error absoluto y relativo del resultado anterior
c) **(1 pto)** Cuantos decimales exactos tendría, considerando que el valor exacto de la velocidad angular fuera 10.5 rad/seg
d) **(1.5 pto)** Desarrolle un script en MATLAB para hallar el ítem b)

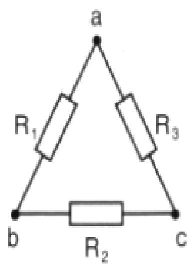
Problema 2

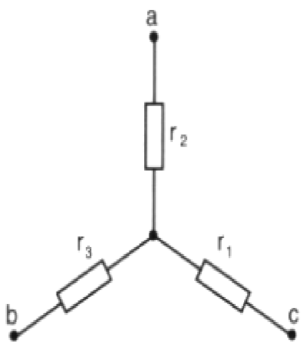
Para transformar un triángulo de resistencias en una estrella de resistencias equivalente se usan las siguientes ecuaciones:

$$r_1 + r_2 = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$r_2 + r_3 = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$r_1 + r_3 = \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}$$





Hacer $R_1 = 6\ \Omega$, $R_2 = 12\ \Omega$, $R_3 = 18\ \Omega$ y determinar r_1, r_2 y r_3.
Para lo cual se pide:

a) **(01 pto)** Demuestre que el sistema lineal tiene solución única.
b) **(02 ptos)** Realice el método de eliminación Gaussiana indicando la primera parte de triangulación del sistema y la segunda parte de sustitución inversa.
c) **(02 ptos)** Hacer la función en MATLAB de Eliminación Gaussiana (eliminag.m) sin pivoteo usando un solo lazo de control y que llame a la función de sustitución inversa.
La función de sustitución inversa tendrá la siguiente cabecera:
function [x]=sustinv(U,c);
% U : matriz triangular superior ,
% c : vector del lado derecho del sistema

Problema 3

(i) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$. Queremos resolver el sistema **Ax=b** iterativamente

mediante la fórmula: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix} x^{(n+1)} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x^{(n)} + \mathbf{b}$

a) **(1.5 pts)** Para qué valores de a podemos asegurar que el método converge?.

b) **(1 pto)** Establecer la relación que existe entre los valores propios de la matriz de iteración de éste método con la matriz de iteración Gauss Seidel.

(ii) Los lados de un triángulo miden 26, 28 y 34 cm. Se dibujan tres circunferencias con centro en cada vértice del triángulo, tangente entre sí dos a dos. Se desea encontrar los radios de cada circunferencia.

a) **(1 pto)** Presente el modelo matemático que resuelva el problema.

b) **(1.5 pts)** Determinar si la convergencia está asegurada para el método de Gauss-Seidel. Justifique correctamente su respuesta

Problema 4

Dada la ecuación: $\cos(x) + x - 0.5 - \frac{x^3}{9} = 0$:

a) **(1.5 pts)** Localizar todas las raíces

b) **(2 pts)** Mediante el método de Newton-Raphson obtener la raíz más cercana a 2.5 con una precisión de 10^{-6}.

c) **(1.5 pts)** Escriba un programa MATLAB para la parte b)

Los Profesores

Solución 1

Solución:

a) Realizando el despeje y reemplazando:

$\omega = \sqrt{\frac{F_c}{mR}}$=10

b)

Calculando los errores parciales

$eF_c = 40$

$em = 0.5$

$eR = 0.04$

$$\frac{\partial w}{\partial F_c} = \frac{0.5}{R * m * \sqrt{\frac{F_c}{mR}}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial m} = -\frac{0.5F_c}{R * m^2 * \sqrt{\frac{F_c}{mR}}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{0.5F_c}{R^2 * m * \sqrt{\frac{F_c}{mR}}}$$

$$ew = \left|\frac{\partial w}{\partial F_c}\right| eF_c + \left|\frac{\partial w}{\partial m}\right| em + \left|\frac{\partial w}{\partial R}\right| eR$$

Haciendo los reemplazos

ew= 0.2750

w=10±0.275

c)

|10+0.275-10.2|=0.075<=0.5*10 ^-0=0.5

|10-0.275-10.2|=0.475<=0.5*10 ^-0=0.5

Por lo tanto la cantidad de cifras significativas podría ser 0

d)

```
sw='((F/(m*R))^0.5)'
dwdf=inline(diff(sw,'F'),'F','m','R')
dwdm=inline(diff(sw,'m'),'F','m','R')
dwdr=inline(diff(sw,'R'),'F','m','R')
fw=inline(sw,'F','m','R')
f=4000;ef=0.01*f
m=20;em=0.5
r=2;er=0.02*r
w=fw(f,m,r)
ew=abs(dwdf(f,m,r))*ef+abs(dwdm(f,m,r))*em+abs(dwdr(f,m,r))*er
```

Solución 2

a)

Sistema lineal $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{Vmatrix} 9 \\ 5 \\ 8 \end{Vmatrix}$ ➔Ar=b

Rango (A)=Rango([A b])=3 por lo que la solución es única.

Sistema aumentado:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Primera etapa - Triangulación

$$\begin{array}{c} \\ (0) \\ (1) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ (-1) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{Vmatrix} 9 \\ 5 \\ 4 \end{Vmatrix}$$

Segunda etapa- Sustitución inversa

$r_3 = 2$

$r_2 = 5 - r_3 = 3$

$r_1 = 9 - r_2 = 6$

```
function x=gaus_e(A,b)
% Eliminacion de Gauss sin pivoteo
n=length(b);
A=[A b];
for k=1:n-1
   Lik=A(k+1:n,k)/A(k,k)
   A(k+1:n,:)=A(k+1:n,:)-Lik*A(k,:)
end
x=zeros(n,1);
U=A(1:n,1:n);
c=A(1:n,n+1);
x=sustinv(U,c);
```

Solución 3

(i)

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$

$$x^{(n+1)} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} x^{(n)} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \text{b}$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho(T) = a^2 < 1 \Rightarrow -1 < a < 1$$

(b) Se trata del método de Gauss – Seidel, es decir valores propios de la matriz de iteración de éste método con la matriz de iteración Gauss Seidel son los mismos.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}; \quad U = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(D-L) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (D-L)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

$$x^{(n+1)} = (D-L)^{-1}Ux^{(n)} + (D-L)^{-1}\mathrm{b} = x^{(n+1)} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} x^{(n)} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \mathrm{b}$$

(ii)

a.
$$\begin{array}{l} r_1 + r_3 = 28 \\ r_1 + r_2 = 26 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 26 \\ 34 \end{pmatrix}. \\ r_2 + r_3 = 34 \end{array}$$

b.

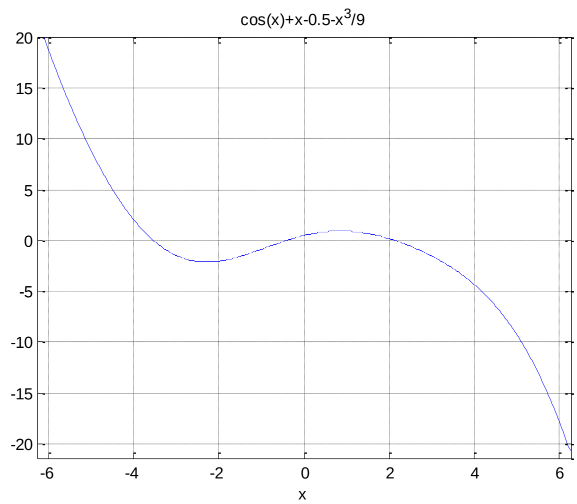
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_{gs} = (D-L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho(T_{gs}) = 1$$

Por lo tanto no es convergente.

Solución 4

a)



Las raíces están en [-4, -3], [-1, 0] y [2, 3]

b)

$$x_0 = 2.5$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos(x_n) + x_n - 0.5 - \frac{x_n^{\ 3}}{9}}{-sen(x_n) + 1 - \frac{x_n^{\ 2}}{3}}$$

n	**x_n**	**Err**
0	2.5	
1	2.180548830488586	0.319451169511414
2	2.149138831197723	0.031409999290863
3	2.148822612777588	0.000316218420135
4	2.148822580595731	0.000000032181857

c)

```
f=inline('cos(x)+x-0.5-x^3/9')
df=inline('-sin(x)+1-x^2/3')
x=2.5
acum=[];
for i=1:10
    xn=x-f(x)/df(x);
    err=abs(xn-x);
    acum=[acum; xn err];
    x=xn;
    if err<1e-6
        break
    end
end
disp(acum)
```