Universidad Nacional de Ingeniería | P.A. 2011-1
Facultad de Ingeniería Mecánica | 05/08/11
DACBHCC

EXAMEN SUSTITUTORIO DE METODOS NUMERICOS (MB536)

- **DURACION: 110 MINUTOS**
- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**

Problema 1

Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} a & -1 & 0 \\ -1 & a & -1 \\ 0 & -1 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a) (2 ptos) Encuentre todos los valores de ***a***, para los cuales el sistema es convergente al aplicar el método de Jacobi.

b) (1.5 ptos) Realice 03 iteraciones del método de Gauss-Seidel con ***a=2*** y un vector inicial $x_1^{(0)}=2$, $x_2^{(0)}=1$, $x_3^{(0)}=0$. Muestre el error (norma infinita) y comente sus resultados.

c) (1.5 ptos) Complete el siguiente programa en ***Matlab*** para obtener los resultados de b)

```
x(1)=2, x(2)=1, x(3)=0
for i=1:3
      ……
      err = ………..
      …….
end
```

Problema 2

Según el modelo de Wilson las expresiones de los coeficientes de actividad a la dilución infinita de una mezcla binaria están dadas por las expresiones:

$$x_1 - \frac{e^{1-x_2}}{7.2} = 0 \quad \text{y} \quad x_2 - \frac{e^{1-x_1}}{2.74} = 0$$

Donde x_1 y x_2 son los parámetros binarios de la mezcla que se desea determinar aproximadamente partiendo desde la unidad en ambos parámetros.

a) (2.5 ptos) Calcule x_1 y x_2 usando el método de Newton-Raphson para sistemas de ecuaciones no lineales, usando 2 iteraciones.

b) (1.5 ptos) Calcule x_1 y x_2 usando el método del Punto Fijo para sistemas de ecuaciones no lineales, hasta obtener 2 decimales exactos.

c) (1 pto) Desarrolle un programa que determine la respuesta usando el método de Newton- Rapshon hasta con 10 decimales exactos, use la norma euclidiana para el criterio de parada.

Problema 3

La siguiente tabla corresponde a la máxima demanda diaria de energía eléctrica en una ciudad:

Fecha	21 de enero	31 de enero	8 de Febrero	20 de Febrero
Demanda Máxima (Mw)	10	15	19	13

a) (2 ptos) Determinar el día que se produce la máxima demanda, y el valor de esta.

b) (1.5 ptos) La demanda media, es dada por:

$$\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx$$

Sugerencia: En la evaluación de la integral, usar la fórmula del trapecio con los puntos de la tabla.

c) (1.5 ptos) Realice el programa en Matlab para evaluar la parte b).

Problema 4

Un tanque de 50 galones de solución contiene sal con una concentración de 10 onzas/galón. Con el fin de diluir el contenido de sal, se suministra agua pura a razón de 2 galones/minuto. Si el depósito tiene una mezcla uniforme y la misma cantidad de agua pura que entra al tanque sale como solución salina cada minuto, la concentración de sal satisface la ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2}{50}x$$

Donde $x(t)$ es la concentración de sal en onzas/galón, t es el tiempo en minutos.
Aplicar el método de Runge Kutta RK-4, con tamaño de paso h= - 2.5, para determinar cuánto tiempo debe transcurrir para que la concentración de sal en el tanque sea la mitad de su valor inicial. Trabaje todos sus cálculos redondeando a 4 decimales.

a) (1 pto) ¿Cuál es la ecuación diferencial ordinaria a resolver?
b) (1.5 pts) Presente los cálculos de la primera iteración.
c) (1.5 pts) Presente los cálculos de la segunda iteración.
d) (1 pto) Utilizando una función predefinida de Matlab escriba código que resuelva este problema.

Los Profesores

Solucionario

Problema 1
Solución

a) Determinamos la matriz de iteración de Jacobi:

$$T_J = \begin{bmatrix} 0 & 1/a & 0 \\ 1/a & 0 & 1/a \\ 0 & 1/a & 0 \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = \det(T_J - \lambda I) = -\lambda^3 + \frac{2\lambda}{a^2}$$

$$\varepsilon(T_J) = \left\{0, \frac{\sqrt{2}}{a}, -\frac{\sqrt{2}}{a}\right\}$$

$$\rho(T_J) = \frac{\sqrt{2}}{|a|} < 1$$

$$a > \sqrt{2} \vee a < -\sqrt{2}$$

Nótese que el criterio de la diagonal estrictamente dominante no da el rango completo de valores de convergencia: $a > 2 \vee a < -2$

b)

k	$x_1^{(k+1)} = \frac{4 + x_2^{(k)}}{2}$	$x_2^{(k+1)} = \frac{x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}}{2}$	$x_3^{(k+1)} = \frac{x_2^{(k+1)}}{2}$	$Err^{(k+1)} = \left\| X^{(k+1)} + X^{(k)} \right\|_\infty$
	2	1	0	-------
0	2.5	1.25	0.625	0.625
1	2.625	1.625	0.8125	0.375
2	2.8125	1.8125	0.90625	0.1875

Se observa que la convergencia es lenta. Radio espectral es 0.7071

c)

```
x(1)=2, x(2)=1, x(3)=0
for i=1:3
   xn(1)=(4+x(2))/2;
   xn(2)=(xn(1)+x(3))/2;
   xn(3)=xn(2)/2
   err=norm(xn-x,inf)
   x(1)=xn(1); x(2)=xn(2);x(3)=xn(3);
end
```

Problema 2

Solucion

a) Tiempo estimado (11 minutos)

$$F = \begin{bmatrix} x_1 - \frac{e^{1-x_2}}{7.20} \\ x_2 - \frac{e^{1-x_1}}{2.74} \end{bmatrix}, \text{Jacobiano}= \begin{bmatrix} 1 & \frac{e^{1-x_2}}{7.20} \\ \frac{e^{1-x_1}}{2.74} & 1 \end{bmatrix}$$

Usando la expresion:
Xs=Xa-inversa(Jacobiano(Xa))*F(Xa)

x1	x2
0.1858	0.6621
0.1589	0.8460

b) Tiempo estimado (6 minutos)
Despejando x_1 y x_2

$$x_1 = \frac{e^{1-x_2}}{7.20} \qquad x_2 = \frac{e^{1-x_1}}{2.74}$$

Tabulando los valores, se obtiene:

x1	x2
0.1389	0.8634
0.1592	0.8461
0.1620	0.8437
0.1624	0.8434

c) Tiempo estimado (5 minutos)

```
syms x1 x2
F=[x1-exp(1-x2)/7.2;x2-exp(1-x1)/2.74]
JF=inline(jacobian(F,[x1 x2]),'x1','x2')
F=inline(F,'x1','x2');
X=[1;1];T=[];Tol=1e-10;
While(1)
    X1=X-inv(feval(JF,X(1),X(2)))*feval(F,X(1),X(2));
        error=norm(X1-X,2);
    X=X1;
    if error<Tol
            break
    end
end
```

Problema 3
Solución

Tabla de diferencias divididas

a)

x	y	y1	y2	y3
21.0000	10.0000			
		0.5		
31.0000	15.0000		0	
		0.5		-0.0017
39.0000	19.0000		-0.05	
		-0.5		
51.0000	13.0000			

$$P_3(x) = 10 + 0.5(x-21) - 0.0017(x-21)(x-31)(x-39)$$

$$P_3'(x) = -0.005x^2 + 0.3033x - 3.9650 = 0$$

$x_{1,2}$={ 41.6077   19.0590}

x=42

Fecha : 42-31 = 11 de Febrero

Maxima demanda = 19.3538

b) T1=(31-21)/2*(10+15) =   125
T2=(39-31)/2*(19+15) =   136
T3=(51-39)/2*(19+13) =   192
T=T1+T2+T3 =   453

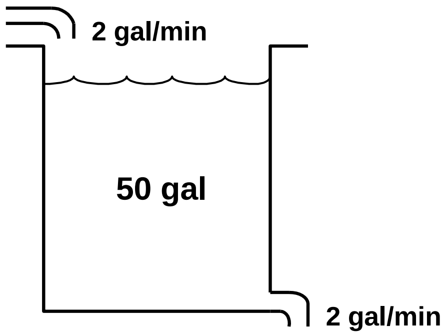
$$I = \frac{1}{(51-21)}(453) = 15.1$$

c)

```
% calculo de la demanda media, con trapecio de intervalos variables.
x=[21  31  39  51];
y=[ 10 15  19 13];
T= trapz(x,y);
I=T/(x(end)-x(1))
```

Problema 4
Solución

SOLUCION



a) Concentración en el tiempo t: $x(t)$

$$\begin{cases} x' = -\frac{2}{50}x \\ x(0) = 10 onzas/gal \end{cases} \qquad (1)$$

Se debe tener el tiempo t de tal manera que: $x(t) = 5$ onzas/galón, donde t es la incógnita y x es la variable independiente.

$$t' = f(x,t)$$

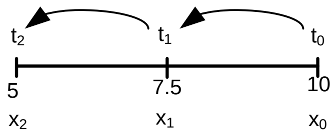
En (1)
$x' = \frac{dx}{dt} = -\frac{2x}{50}$; de donde $\frac{dt}{dx} = -\frac{25}{x}$

Luego la ecuación a resolver es

$$\begin{cases} t' = -\frac{25}{x} \\ t(10) = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

b) Aplicando RK-4: Primera iteración

Para $n = 2$, $h = -2.5$



La ecuación $t' = -\frac{25}{x} = f(x,t)$

$$t_1 = t_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Donde

$$k_1 = hf(x_0, t_0) = -2.5f(10{,}0) = -2.5\left(-\frac{25}{10}\right) = 6.25$$

$$k_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, t_0 + \frac{k_1}{2}\right) = -2.5f\left(10 - \frac{2.5}{2}, 0 + \frac{6.25}{2}\right) = -2.5f(8.75{,}3.125)$$
$$= -2.5\left(\frac{-25}{8.75}\right) = 7.1429$$

$$k_3 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, t_0 + \frac{k_2}{2}\right) = -2.5f\left(10 - \frac{2.5}{2}, 0 + \frac{7.1429}{2}\right) = -2.5f(8.75{,}3.5715)$$
$$= -2.5\left(\frac{-25}{8.75}\right) = 7.1429$$

$$k_4 = hf(x_0 + h, t_0 + k_3) = -2.5f(10 - 2.5{,}0 + 7.1429) = -2.5f(7.5{,}7.1429)$$
$$= -2.5\left(\frac{-25}{7.5}\right) = 8.3333$$

$$t_1 = 0 + \frac{1}{6}(6.25 + 2(7.1429) + 2(7.1429) + 8.3333) = 7.1925$$

c) Aplicando RK-4: Segunda iteración

$$t_2 = t_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Donde:

$$k_1 = hf(x_1, t_1) = -2.5f(7.5{,}7.1925) = -2.5\left(-\frac{25}{7.5}\right) = 8.3333$$

$$k_2 = hf\left(x_1 + \frac{h}{2}, t_1 + \frac{k_1}{2}\right) = -2.5f\left(7.5 - \frac{2.5}{2}, 7.1925 + \frac{8.3333}{2}\right)$$
$$= -2.5f(6.25{,}11.3592) = -2.5\left(\frac{-25}{6.25}\right) = 10.000$$

$$k_3 = hf\left(x_1 + \frac{h}{2}, t_1 + \frac{k_2}{2}\right) = -2.5f\left(7.5 - \frac{2.5}{2}, 7.1925 + \frac{10.0000}{2}\right)$$
$$= -2.5f(6.25{,}12.1925) = -2.5\left(\frac{-25}{6.25}\right) = 10.0000$$

$$k_4 = hf(x_1 + h, t_1 + k_3) = -2.5f(7.5 - 2.5{,}7.1925 + 10.0000) = -2.5f(5{,}17.1925)$$
$$= -2.5\left(\frac{-25}{5.0}\right) = 12.5000$$

$$t_2 = 7.1925 + \frac{1}{6}(8.3333 + 2(10.000) + 2(10.000) + 12.5000) = 17.3314$$

d) Resolviendo por Matlab

Escribimos un Archivo M, donde se define la función

```
function f = tq_sal(x,t)
% Pregunta Ex Sustitutorio 2011-1
f(1) = -25/x;
```

Luego en la ventana de comandos escribimos:

```
xx = 10:-2.5:5;
t0 = [0];
[T,Y] = ode45('tq_sal',xx,t0);
Y
```