

EXAMEN PARCIAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

- DURACION: 110 MINUTOS
- SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO
- ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS

Problema 1

Dada la matriz de orden n , $A = (a_{ij})$, donde

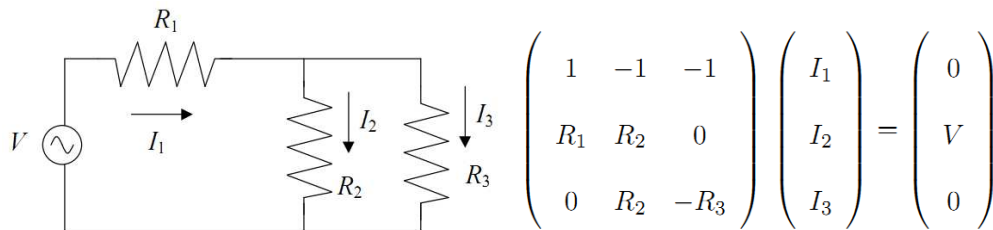
$$a_{ij} = \begin{cases} i(n-j+2*i) & \text{si } i \leq j \\ a_{ji} & \text{si } i > j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

y la columna de términos independientes $b = (1, 2, \dots, n)^T$, para $n = 9$.

- (03 pts) Escriba una función o un script en Matlab que resuelva el sistema exclusivamente haciendo uso del operador \. Debe imprimirse la matriz A, el vector b, el número de condición de A, y la solución.
- (01 pto) Si se desea aplicar la iteración de Jacobi con Matlab. ¿Con que comandos construye las matrices que intervienen? Asuma que A ya existe en el espacio de trabajo.
- (01 pto) Para (b) ¿Cuál es el algoritmo de iteración, dada la estimación inicial x^0 elegida arbitrariamente?

Problema 2

Con el siguiente circuito se forma un sistema de ecuaciones lineales.



Considerando $V = 220\text{v}$, $R_1 = 110\Omega$, $R_2 = 220\Omega$ y $R_3 = 1000\Omega$.

- (02 pts) Resuelva el sistema de ecuaciones por eliminación Gaussiana con pivoteo total.
- (02 pts) Factorice la matriz de coeficientes usando el método de Doolittle.
- (01 pto) Mediante la factorización anterior, encuentre la solución del sistema.

Problema 3

Sea el sistema lineal de la forma $Ax=b$, donde las matrices son:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \beta \end{bmatrix} \text{ y } b = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Se pide:

- a) **(01pto)** Investigue los valores de β para los cuales el método de Jacobi converge.

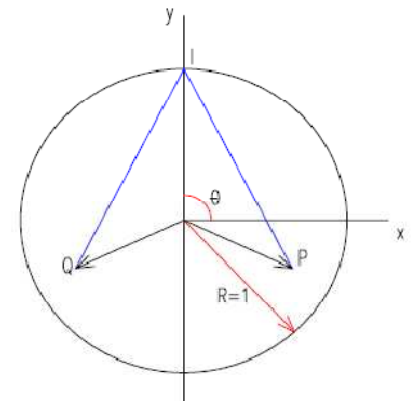
La Matriz de Gauss Seidel, para la forma $x^{(i+1)} = \mathcal{F}x^{(i)} + h$, es:

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/(2\beta) \end{bmatrix}$$

- b) **(01pto)** Si $\beta = 3/4$, ¿el método de Gauss Seidel convergerá?. Justifique.
 c) **(02ptos)** Si b.1) es afirmativa, realice tres iteraciones con el método de Gauss Seidel con $x^{(0)} = [2.5 \ 3 \ 16/3]^T$. Comente su respuesta.
 d) **(01pto)** Determine el error usando la norma infinita del residuo en la tercera iteración:
 $r^{(3)} = \|Ax^{(3)} - b\|$, Comente el número de cifras decimales exactas obtenidas en esta iteración.

Problema 4

Para jugar al billar en una mesa circular hemos de golpear la bola Q de la figura adjunta con la bola P, tras un impacto I en la banda. Conocido el radio R de la mesa y las posiciones en coordenadas cartesianas (cuyo origen es el centro de coordenadas) de los puntos P y Q son (x_P, y_P) y (x_Q, y_Q) respectivamente, el punto de impacto viene definido por el ángulo central θ .



Tras un análisis geométrico del problema, se prueba que los valores de θ que proporcionan los puntos de impacto posible son los ceros de la función:

$$f(\theta) = \frac{x_P \sin(\theta) - y_P \cos \theta}{\sqrt{(R \cos \theta - x_P)^2 + (R \sin \theta - y_P)^2}} + \frac{x_Q \sin(\theta) - y_Q \cos \theta}{\sqrt{(R \cos \theta - x_Q)^2 + (R \sin \theta - y_Q)^2}}$$

Si consideramos un billar de radio unidad, $P = (0.6,0)$ y $Q = (-0.6,0)$.

- a) **(02ptos)** Empezar con el método de la **B**isección para aproximar el punto de impacto I, con un intervalo inicial de $\theta \in [1,2]$, realice 03 iteraciones. Muestre el error.
 b) **(01pto)** ¿Cuántas iteraciones serán necesarias para tener una precisión de 10^{-4} ? **No realice iteraciones.**
 c) **(02ptos)** Realice 02 iteraciones utilizando el método de Newton. Considere $\theta_0 = 1$.

Los Profesores

Solucionario

SOLUCION 1

(a)

```
function [sol] = pregEP_2011_1()
% solucion pregunta examen parcial 2011_1
n = 9;
for i = 1:n
    for j = 1:n
        if i <= j
            A(i,j) = i*(n - j + 2*i);
        else
            A(i,j) = A(j,i);
        end
    end
end
A % Imprimir A
b = (1:n)' % imprimir vector columna b
condA = cond(A) % imprimir el numero de condicion de A
sol = A\b; % vector solución
```

(b)

```
M = diag(diag(A));
N = M - A;
```

(c)

$$Mx^{(k)} = Nx^{(k-1)} + b$$

Solución 2

a) Preparando la matriz ampliada es:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 110 & 220 & 0 & 220 \\ 0 & 220 & -1000 & 0 \end{bmatrix}$$

Reubicando el pivote

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -1000 & 220 & 0 & 0 \\ 0 & 220 & 110 & 220 \\ 0 & 0 & 1.61 & 1.22 \end{bmatrix}$$

Realizando sustitución inversa:

Se tiene:

$$X = [0.1366 \quad 0.6211 \quad 0.7578]$$

Debido al cambio de columna de la 1 x 3

La respuesta correcta de la inicial es:

$$X = [0.7578 \quad 0.6211 \quad 0.1366]$$

b) Aplicando el algoritmo de Doolittle

Descomponemos A:

$$A = LxU \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 110 & 1 & 0 \\ 0 & 0.66667 & 1 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 330 & 110 \\ 0 & 0 & -1073.33333 \end{bmatrix}$$

c) Por sustitución progresiva obtenemos

$$Lz = b \quad z = \begin{bmatrix} 0 \\ 220 \\ -145.44667 \end{bmatrix}$$

Por sustitución regresiva es:

$$z = Ux \quad x = \begin{bmatrix} 0.7570 \\ 0.6215 \\ 0.1355 \end{bmatrix}$$

Solución 3

a) Por diagonal dominante en A: $|\beta| > 1 \Rightarrow \beta > 1 \text{ o } \beta < -1$

$$T_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1/\beta & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Usando radio espectral $\rho(T_j) = \left| \frac{1}{\sqrt{2\beta}} \right| < 1 \quad \beta > \frac{1}{2}$

$$\text{b.1) } \mathcal{F} = T_{gs} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/(2\beta) \end{bmatrix}$$

Usando radio espectral $\rho(T_{gs}) = \left| \frac{1}{2\beta} \right| < 1 \quad \beta > \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \beta < -\frac{1}{2}$


Por lo tanto converge para cualquier valor inicial arbitrario.


b.2) Algoritmo de Gauss – Seidel


$$x^{(i+1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{bmatrix} x^{(i)} + \begin{bmatrix} 5/2 \\ 1/2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Iteraciones con valor inicial $x^{(0)} = D^{-1}b$

i	x ₁	x ₂	x ₃
0	2.5	3.0	5.333
1	-0.1667	3.1667	5.5556
2	-0.2778	3.2778	5.7037
3	-0.3519	3.3519	5.8025


 -0.5


 3.5


 6

El método converge pero es muy lento. $\rho(T_{gs})=0.667 < 1$

3) Error = residuo = 0.0988 (ninguna cifra decimal en la tercera iteración)

Solución 4

(a)

Hemos de golpear la bola Q de coordenadas (-0.6,0) con la bola P=(0.6,0), tras un impacto I en la banda. Sabe que los ceros de la función:

$$f(\theta) = \frac{0.6 \sin(\theta)}{\sqrt{(\cos \theta - 0.6)^2 + \sin^2 \theta}} + \frac{-0.6 \sin(\theta)}{\sqrt{(\cos \theta + 0.6)^2 + \sin^2 \theta}}$$

nos proporciona la posición del punto de impacto:

a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)	error
1.0000	2.0000	1.5000	0.2422	-0.1880	0.0321	1.0000
1.5000	2.0000	1.7500	0.0321	-0.1880	-0.0809	0.5000
1.5000	1.7500	1.6250	0.0321	-0.0809	-0.0246	0.2500

(b)

$$\frac{b-a}{2^n} < Tol \Rightarrow \frac{1}{2^n} < 10^{-4} \quad n > 13.2877 \quad \therefore n = 14$$

(c)

$$f'(\theta) = \frac{0.6 \cos(\theta)}{\sqrt{(\cos \theta - 0.6)^2 + \sin^2 \theta}} + \frac{0.6 \sin(\theta)}{\left(\sqrt{(\cos \theta - 0.6)^2 + \sin^2 \theta}\right)^3} \times (-1/2) \left((2(\cos \theta - 0.6)(-\sin \theta)) + 2 \sin \theta \cos \theta \right) - \frac{0.6 \cos(\theta)}{\sqrt{(\cos \theta + 0.6)^2 + \sin^2 \theta}} + \frac{-0.6 \sin(\theta)}{\left(\sqrt{(\cos \theta + 0.6)^2 + \sin^2 \theta}\right)^3} \times (-1/2) \left((2(\cos \theta + 0.6)(-\sin \theta)) + 2 \sin \theta \cos \theta \right)$$

k	$X^{(k)}$	$f(X^{(k)})$	$f'(X^{(k)})$
0	1	0.2422	-0.3586
1	1.6754	-0.0474	-0.4513
2	1.5704		