EXAMEN PARCIAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

- **DURACION: 110 MINUTOS**
- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**

Problema 1

El coeficiente de descarga C_q de un orificio puede determinarse colectando el agua que pasa por él durante un tiempo determinado cuando está bajo carga constante h. La fórmula es:

$$C_q = \frac{w}{t\,\rho\,A\,\sqrt{2\,g\,h}}$$

$$w = 900\ Lb-m \qquad A = \pi\, d^2/4$$

$$t = 600\ seg \qquad g = 32.17\ pie/seg^2$$

$$\rho = 62.36\ Lb-m/pie^3 = cte \qquad h = 12\ pies$$

$$d = 0.5\ pu\lg \qquad \pi = 3.1416 = cte$$

a) Si C_q debe medirse dentro de ±5% (de C_q), para los valores numéricos dados, que errores son admisibles en los datos medidos?
b) Escriba una función en MATLAB para resolver la pregunta a) usando parámetros de entrada y salida adecuados y muestre como se invocará a dicha función en la ventana de comandos.

Nota.- La fórmula es dimensionalmente correcta por tanto no requiere ninguna conversión de unidades.

Problema 2

Considerando el siguiente sistema de ecuaciones:

$ax_1+bx_2=b$
$bx_1+cx_2=b$

Donde a,b y c son reales mayores que 0.
Haciendo uso de los métodos iterativos para hallar la solución, determinar:

a) La relación entre a, b y c para que el método de Jacobi converja
b) La relación entre a, b y c para que el método de Gauss-Seidel converja
c) Hallar la solución aproximada en la segunda iteración con el método Jacobi

Problema 3

Considerando que la concentración de microorganismos en un lago (***C***) es modelada en función del tiempo (***t***) por la expresión:

$$C(t) = 85e^{k_1 \cdot t} + 18e^{k_2 \cdot t}$$

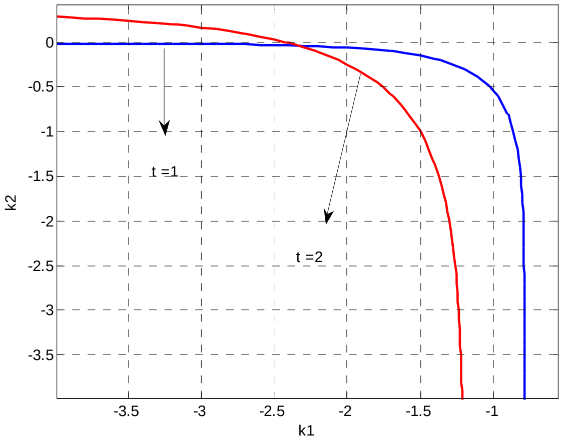
Y que se efectuaron dos mediciones de la concentración, cuyos resultados serían:

t	**1**	**2**
C(t)	**27.5702**	**17.6567**

Para determinar k_1 y k_2 , se pide:

a) Formule el problema no lineal **F(K)=0.**

b) Realice los comandos en Matlab para encontrar el siguiente gráfico:



c) Use el método de ***Newton-Raphson*** para determinar k_1 y k_2. Considere como aproximación inicial o ponto (β, ω) = (−1.9, −0.15) y efectué 03 iteraciones, determinando el error relativo (noma infinita) en cada una de las iteraciones.

Los Profesores

P1 Solución

a) $C_q = \dfrac{4\,w}{t\,\rho\,\pi\,d^2\,\sqrt{2\,g\,h}} = a\dfrac{w}{t\,d^2\,\sqrt{h}}$

Siendo constante $a = \dfrac{4}{\rho\,\pi\,\sqrt{2\,g}} = 0.0025$

$$C_q = \frac{4\,w}{t\,\rho\,\pi\,d^2\,\sqrt{2\,g\,h}} = a\frac{w}{t\,d^2\,\sqrt{h}}$$

$$C_q \approx a\frac{w}{t\,d^2\,\sqrt{h}} = 0.0044$$

$$\xi C_q \le 0.5\%\left(C_q\right) = 2.2044x10^{-4}$$

$$\xi w \le \frac{\xi C_q}{4\left|\dfrac{\partial C_q}{\partial w}\right|} = 11.25$$

$$\xi t \le \frac{\xi C_q}{4\left|\dfrac{\partial C_q}{\partial t}\right|} = 7.5$$

$$\xi d \le \frac{\xi C_q}{4\left|\dfrac{\partial C_q}{\partial d}\right|} = 0.0031$$

$$\xi h \le \frac{\xi C_q}{4\left|\dfrac{\partial C_q}{\partial h}\right|} = 0.3$$

b)

```
function [ew,et,ed,eh]=calcula(eCq,w,t,d,h)
pp=3.1416; rr=62.36; g=32.17; a=4/(pp*rr*sqrt(2*g));
dCq_w =a/t/d^2/h^(1/2);
dCq_t =-a*w/t^2/d^2/h^(1/2);
dCq_d =-2*a*w/t/d^3/h^(1/2);
dCq_h =-1/2*a*w/t/d^2/h^(3/2);
ew=eCq/4/abs(dCq_w);
et=eCq/4/abs(dCq_t);
ed=eCq/4/abs(dCq_d);
eh=eCq/4/abs(dCq_h);

Llamado a la función:
[ew, et, ed, eh]=calcula(2.2044e.4,900,600,0.5,12)
```

P2 solución
Solución
a)

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$D := \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \qquad L := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b & 0 \end{pmatrix} \qquad U := \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_j = D^{-1}(L+U)$$
$$c_i = D^{-1}b$$

$$Tj := \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \qquad Tj := \begin{pmatrix} 0 & \frac{-b}{a} \\ \frac{-b}{c} & 0 \end{pmatrix} \qquad c := \begin{pmatrix} \frac{b}{a} \\ \frac{b}{c} \end{pmatrix} \qquad \left| \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{-b}{a} \\ \frac{-b}{c} & -\lambda \end{pmatrix} \right|$$

$$\lambda^2 - \frac{b^2}{a \cdot c} = 0 \qquad \lambda := \frac{b}{\sqrt{a \cdot c}} \qquad b < \sqrt{ac}$$

b)

$$x^{(k+1)} = (D-L)^{-1}Ux^{(k)} + (D-L)^{-1}b$$
$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$$

$$Tgs := \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ \frac{-b}{a \cdot c} & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Tgs := \begin{pmatrix} 0 & \frac{-b}{a} \\ 0 & \frac{b^2}{a \cdot c} \end{pmatrix} \qquad c := \begin{pmatrix} \frac{b}{a} \\ \frac{-b^2}{a \cdot c} + \frac{b}{c} \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{-b}{a} \\ 0 & -\lambda + \frac{b^2}{ac} \end{pmatrix} \right| \qquad \lambda^2 - \lambda \cdot \frac{b^2}{a \cdot c} = 0 \qquad \lambda 1 := 0 \qquad \lambda 2 := \frac{b^2}{a \cdot c}$$

$$b < \sqrt{ac}$$

c)

$$x := \begin{pmatrix} 0 & \frac{-b}{a} \\ \frac{-b}{c} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{b}{a} \\ \frac{b}{c} \end{pmatrix} \qquad x := \begin{pmatrix} \frac{b}{a} \\ \frac{b}{c} \end{pmatrix}$$

$$x := \begin{pmatrix} 0 & \frac{-b}{a} \\ \frac{-b}{c} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{b}{a} \\ \frac{b}{c} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{b}{a} \\ \frac{b}{c} \end{pmatrix} \qquad x := \begin{pmatrix} \frac{-b^2}{a \cdot c} + \frac{b}{a} \\ \frac{-b^2}{a \cdot c} + \frac{b}{c} \end{pmatrix}$$

P3 solución

a)

$$\begin{bmatrix} 85e^{k_1} + 18e^{k_2} - 27.5702 \\ 85e^{2k_1} + 18e^{2k_2} - 17.6567 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b)

```
close all
t=-4:0.1:0.5;
[X,Y]=meshgrid(t);
 z1=27.5702-85*exp(X)-18*exp(Y);
 z2=17.6567-85*exp(2*X)-18*exp(2*Y);
 contour(t,t,z2,[0 0],'b');
hold on
contour(t,t,z1,[0 0],'r');
```

c)

Algoritmo $X_{i+1}=X_i-J(X_i)^{-1}*F(X_i)$

```
F=       [ 27.57-85.*exp(x)-18.*exp(y)
          17.66-85.*exp(2.*x)-18.*exp(2.*y)]

J =

              [     -85*exp(x),     -18*exp(y)]
              [ -170*exp(2*x),   -36*exp(2*y)]
```

$X0=[-1.9, -0.15]^t$

```
J =

[     -85*exp(x),     -18*exp(y)]
[ -170*exp(2*x),   -36*exp(2*y)]



Jx0 =

   -0.0952    0.0553
    0.0136   -0.0454


Fx0 =

   -0.6359
    2.4205



Jx1 =

   -0.1094    0.0565
    0.0083   -0.0339
```

```
Fx1 =

   -0.3385
   -0.5325



Jx2 =

   -0.1103    0.0578
    0.0086   -0.0350


Fx2 =

   -0.0023
   -0.0079

Iteraciones
        It        k1      k2        errela
         0    -1.9000   -0.1500    0.0928
    1.0000    -2.0944   -0.0315    0.0072
    2.0000    -2.1014   -0.0467    0.0001
    3.0000    -2.1012   -0.0470
```