

**CALCULO NUMERICO (MB535)**  
**CUARTA PRÁCTICA CALIFICADA - PARTE I**

**INDICACIONES**

1. Resolver las preguntas según la tabla siguiente:

<b>SECC.</b>	<b>PROBLEMAS</b>		
A	5	7	11
C	1	9	12
D	3	4	17
E	6	2	19
F	8	10	16
G	1	7	13
H	3	9	20
I	5	10	14
J	8	2	15

2. Se formaran grupos de uno o dos alumnos correspondientes a la misma sección.

3. Si se detecta dos trabajos idénticos tendrán calificativo CERO.

4. Presentar un informe adjuntando su diskette respectivo.

5. Contenido del informe:

- Análisis del problema
- Implementación de los algoritmos (listados de programas) y prueba
- Conclusiones y recomendaciones

**FECHA DE ENTREGA DE TRABAJO:**

**Día : Sábado 21 de Julio de 2007**

**Hora : 13:00 -14:00 horas**

**Lugar : Aulas de Evaluación del Test correspondiente a la P4-II.**

**HORARIO DE ASESORIA**

Robert Castro	Lunes	10-12	Miércoles	14-15	Centro de Cómputo
Hermes Pantoja	Martes	13-15	Jueves	15-16	Oficina A2-204
Rosa Garrido	Lunes	12-14	Miércoles	8-10	Oficina A1-254
Maximo Obregon	Miercoles	10-12	Miercoles	16-18	Centro de Cómputo

### Problema 1

Sea la formula de cuadratura:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = af(-1) + bf(-1/4) + cf(1/4) + df(1)$$

- Obtener los coeficientes de tal manera que sea exacta para cualquier polinomio de grado 3 o menor.
- Escriba una rutina en MATLAB para aplicar la formula anterior a las siguientes integrales:

$$\int_1^2 (x^3 + x^2 + x + 1)dx \quad \int_3^4 (e^x \text{sen}(2x))dx \quad \int_1^3 (x^2 e^x \text{sen}(2x))dx$$

- Compare sus resultados con los obtenidos con matemática simbólica y la función **'quad'**.

### Problema 2

Según Sweigert y Beardsley el calor específico ( $cp$ ) a presión constante para el vapor de agua (peso molecular 18.016) en el rango de 300 a 3000 °K se puede aproximar por la siguiente formula empírica:

$$cp = \alpha + \frac{\beta}{\sqrt{T}} + \frac{\gamma}{T} \left( \frac{\text{Cal}}{\text{Kg} - ^\circ\text{K}} \right)$$

$$\alpha = 1.102$$

$$\beta = -24.6$$

$$\gamma = 231$$

Determine el cambio de entropía ( $\Delta s$ ) del vapor de agua que se calienta a presión constante desde 300 °K a 1100 °K:

$$\Delta s = \int_{T_1}^{T_2} \left( \frac{cp}{T} \right) dT \left( \frac{\text{Cal}}{\text{Kg} - ^\circ\text{K}} \right)$$

- Aproxime  $\Delta s$  usando la formula de Simpson 1/3 para ello escriba una rutina en MATLAB, antes deduzca mediante la formula de error el numero de particiones requerido para tener 8 cifras decimales exactas.
- Compare sus resultados con las obtenidas con Matemáticas simbólicas y la función **"quad"** de MATLAB.

### Problema 3

$$\int_1^\pi \frac{\text{Ln}(x)}{x^2 - 2x + 2} dx$$

- Escriba una rutina en MATLAB para generar el polinomio de Gauss-Legendre de orden "n" y sus pesos correspondientes.
- Aproxime la integral usando la rutina anterior partiendo de n=1, 2, 3,... hasta tener 8 c.d.e.
- Compare sus resultados con las obtenidas con matemática simbólica y la función **"quad"** de MATLAB.

#### Problema 4

Con respecto al método de Newton-Cotes cerrada, que usa la siguiente expresión:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = h(w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + \dots + w_n f(x_n)) + E$$

- a) Desarrolle una función que permita calcular los pesos  $w_i$  en un vector fila para un  $n$  cualquiera. Usar la siguiente definición:

function w=newton\_cotes\_cerrada(n)

- b) Usando la rutina anterior, implemente una función que permita calcular la integral aproximada de una función cualquiera en un intervalo  $[a,b]$ , deberá usar las fórmulas de Newton-Cotes cerrada para cualquier  $n$ . Usar la siguiente definición:

function integral\_nc(f,x0,xf,n,np)

Donde: **f**: Es una función cualquiera en cadena

**x0 y xf**: Es el intervalo de integración

**n**: Es el grado para la formula de Newton-Cotes cerrada

**np**: Cantidad de puntos, el programa debe validar este valor

- c) A través de una rutina en Matlab y usando las funciones anteriores, calcule la siguiente integral:

$$\int_{0.5}^{3.5} \frac{x \operatorname{sen}(1/x)}{\ln(1+x^{5 \operatorname{sen} x})} dx$$

Muestre en un gráfico comparativo, la integral exacta con la aproximada, para diferentes valores de  $n$  y  $np$ . Comente los resultados

#### Problema 5

- a) Implemente una función en Matlab que permita calcular el polinomio de Legendre  $P(x)$  de grado  $n$ , sus raíces  $x_i$ , los factores de peso  $c_i$  y que grafique para  $x \in [-1,1]$ . La cual debe tener el siguiente encabezado

function [P,xi,ci]=pol\_leg(n)

- b) Con la ayuda de la rutina anterior, usando cuadratura de Gauss-Legendre, implemente la siguiente función.

function integral\_gl(f,x0,xf,n)

Donde: **f**: Es una función cualquiera en cadena

**x0 y xf**: Es el intervalo de integración

**n**: Es el grado del polinomio de legendre

- c) Use la función anterior para calcular la integral de:

$$V = \int_0^8 \frac{x^{\cos(x)} dx}{\sqrt{e^x + e^{-\operatorname{sen}(x)}}}$$

Usando cuadratura de Gauss-Legendre, con polinomio de grado 20.

## Problema 6

Con respecto al método de coeficientes indeterminados, para calcular la integral de una función:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + \dots + a_n f(x_n)$$

a) Implemente la siguiente función:

function a=obtener\_coeficientes(x)

Donde:

**x:** Es el vector que contiene a:  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , nodos no necesariamente igualmente espaciados

**a:** Es el vector que contiene a:  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , pesos de la cuadratura.

b) Usando los coeficientes anteriores, implemente una función que permita calcular la integral de una función cualquiera, considerando la siguiente cabecera:

function integral\_cis(f,x)

Donde:

**f:** Es una función cualquiera en cadena

**x:** Son los nodos que se considera para la integración, considere los extremos, como el intervalo a integrar.

c) Usando la rutina en b), implemente una función que permita calcular la integral de una función cualquiera, considerando la siguiente cabecera:

function integral\_cic(f,n,x)

Donde:

**f:** Es una función cualquiera en cadena

**n:** Es el numero de particiones

**x:** Son los nodos que se considera para la integración, en cada partición.

d) Usando las funciones de b y c, con 2 juegos de valores apropiados para n y x: calcule la siguiente integral:

$$\int_0^{10} \frac{x \ln((\sin(x) \cos(x))^2 + x^2)}{1 + x^{2 \cos x}} dx$$

## Problema 7

Dada la siguiente función

$$\int_0^1 x^{0.1} (1.2 - x)(1 - e^{20(x-1)}) dx$$

Se pide:

a) Grafique el integrando para  $x=[0 \ 1]$

b) Evalúe el valor exacto usando el comando el comando “int” del Matlab.

c) Use la cuadratura adaptativa de Lobatto de Matlab, y aproxime con una tol de  $10^{-8}$ , el valor de la integral. ¿Cuál es el error cometido y muestre los valores paso a paso?

d) Aplique 05 intervalos por la regla compuesta del Trapecio

e) ¿Cuál es la ventaja y desventaja de usar la regla de Simpson (1/3) o (3/8) con respecto a la regla trapezoidal al integrar numéricamente esta función?

### Problema 8

a) Encontrar los valores de A,B,C,D y E que hacen que la fórmula:

$$\int_0^1 f(x)dx \approx Af(0) + Bf(1/4) + Cf(1/2) + Df(3/4) + Ef(1)$$

Sea exacta para todos los polinomios de grado menor o igual a cuatro.

- b) Considerando A=0 y E=0, encuentre los valores B,C y D y demuestre la cuadratura abierta que ajuste exactamente para todo polinomio menor o igual a dos.
- c) Pruebe la cuadratura encontrada en a) con la siguiente integral

$$I = \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx$$

Comente su respuesta y compare con la solución analítica encontrada con Matlab.

d) Pruebe la cuadratura abierta encontrada en b) con la siguiente integral

$$\int_0^1 \frac{(\sin(x))^2}{x} dx$$

Comente su respuesta y compare con la solución analítica encontrada con Matlab.

### Problema 9

La función error se define como:

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

- a) Hallar  $erf(1)$  utilizando el método de Romberg, hasta alcanzar una precisión de 4 dígitos significativos. Trabajar con una cantidad suficiente de dígitos para garantizar no influya el error de redondeo.
- b) Hallar  $erf(1)$  utilizando la cuadratura de Gauss con 5 puntos.
- c) Estimar el error de truncamiento del resultado obtenido por Romberg. Estimar el resultado obtenido por Gauss debido al redondeo en las coordenadas y en los coeficientes provistos. En base a la comparación entre los resultados obtenidos en a) y b).  
¿Qué puede decir del error de truncamiento del método de Gauss?  
¿Cuál de los dos métodos ha resultado más trabajoso en términos de la cantidad de cálculos?

### Problema 10

Calcule el cambio de entropía y entalpía ideal del dióxido de carbono a presión constante, desde 300K hasta 900K, empleando la tabla.

T(K)	Cp(KJ/Kg K)
300	0.846
400	0.939
500	1.014
600	1.075
700	1.126
800	1.148
900	1.204

Se sabe que el cambio de entropía y entalpía viene dado por:

$$\Delta H = \int C_p dT$$

$$\Delta S = \int \frac{C_p}{T} dT$$

- Aproxime las integrales usando la formula de Romberg usando una rutina en MATLAB,
- Compare sus resultados con las obtenidas con Matemáticas simbólicas y la función “**quad**” de MATLAB

### Problema 11

Un circuito eléctrico consiste de un capacitor de capacitancia constante  $C = 1.1$  faradios conectado en serie con una resistencia constante de  $R_0 = 2.1$  ohms. Se aplica un voltaje  $\xi(t) = 110 \sin t$  en el tiempo  $t=0$ . Cuando la resistencia se calienta esta se convierte en una función de la corriente  $i$ ; esto es,

$$R(t) = R_o + ki \quad \text{donde } k = 0.9,$$

Obteniéndose la ecuación diferencial

$$\left(1 + \frac{2k}{R_o} i\right) \frac{di}{dt} + \frac{1}{R_o C} i = \frac{1}{R_o} \frac{d\xi}{dt}$$

Suponiendo que  $i(0) = 0$ .

Escriba sus rutinas en MATLAB y:

- Resuelva mediante Euler tomando  $h=1, 0.1$  y  $0.01$ .
- Resuelva mediante Runge-Kutta de orden 2 y 4 tomando  $h=1, 0.5$  y  $0.1$ .
- Haga un grafico comparativo de los resultados anteriores con las soluciones obtenidas con la matemática simbólica y la función ode45.

### Problema 12

Sea el problema de valor inicial:

$$y' = \text{sen}(y) \quad y(0) = 1$$

Resuelva para  $x$  entre 0 y 5, con  $h=0.1, 0.05$  y  $0.01$ .

- Analice la existencia y unicidad de la solución
- Escriba una rutina en MATLAB para resolver mediante:
  - Euler
  - Taylor de orden 2, 3 y 4
  - Runge-Kutta de orden 2
- Haga un grafico comparativo de los resultados obtenidos en a) versus la solución exacta obtenida con matemática simbólica.
- Resuelva mediante la función ode45 y comente sus resultados.

### Problema 13

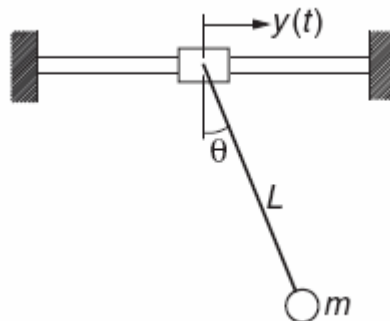
El péndulo es suspendido de un collar deslizante. El sistema esta en reposo cuando el movimiento de oscilación  $y(t) = Y \text{sen}(\omega t)$  es impuesto al collar, partiendo de  $t = 0$ .

La ecuación diferencial que describe el movimiento del péndulo es:

$$\theta'' = -\frac{g}{L} \text{sen}(\theta) + \frac{\omega^2}{L} Y \cos(\theta) \text{sen}(\omega t)$$

Grafique  $\theta$  vs.  $t$  para  $t=0$  a  $10$  seg. y determine el más grande  $\theta$  durante este periodo.

Use  $g = 9.80665 \text{ m/s}^2$ ,  $L = 1 \text{ m}$ ,  $Y = 0.25 \text{ m}$  y  $\omega = 2.5 \text{ rad/s}$



Escriba sus rutinas en MATLAB y:

- Resuelva mediante Euler tomando  $h=1, 0.1$  y  $0.01$ .
- Resuelva mediante Runge-Kutta de orden 2 y 4 tomando  $h=1, 0.5$  y  $0.1$ .
- Haga un grafico comparativo de los resultados anteriores con las soluciones obtenidas con la matemática simbólica y la función ode45.

### Problema 14

En una habitación que contiene  $300 \text{ m}^3$  de aire limpio se va a celebrar una fiesta. En un instante dado  $t = 0$  algunas personas comienzan a fumar, de modo que el humo empieza a invadir la habitación a una velocidad de  $3 \text{ m}^3/\text{h}$ , conteniendo una concentración de  $0.04 \text{ gr/m}^3$  de monóxido de carbono. Al mismo tiempo, abrimos una ventana por la que sale el humo a la misma velocidad. Considerando un  $h$  apropiado, se pide:

- Grafique la cantidad de humo  $y(t)$  en la habitación desde el inicio hasta 1 hora. Usar el método de Runge Kutta de orden 2 y 4
- Grafique usando el método de Euler y compare
- Usando el comando ode45, averigüe: ¿Cuándo será prudente, que una persona abandone la fiesta, considerando que el monóxido de carbono comienza a ser peligroso con una concentración superior a  $0.0002 \text{ gr/m}^3$ ?
- averigüe, cuando deberá abandonar una persona prudente la fiesta, considerando que el monóxido de carbono comienza a ser peligroso con una concentración superior a  $0.0002 \text{ gr/m}^3$ ?

### Problema 15

En un campus universitario que tiene 1000 estudiantes hay un único estudiante portador del virus de la gripe. Sea  $y(t)$  el numero de estudiantes contagiados en el día  $t$ . Si la velocidad con la que el virus se propaga es proporcional al producto entre los alumnos contagiados y los estudiantes no contagiados. Considerando un  $h$  apropiado, se pide:

- Usando el método de Runge Kutta de orden 2 y 4 determine el número de personas enfermas en el día  $t$  si se sabe que pasados 4 días hay 50 enfermos.
- Usando el método de Euler determine cuando habría 500 estudiantes enfermos.
- Usando el comando ode45 investigue: Si los estudiantes enfermos no se tratan con medicamentos, que número de enfermos habría cuando pase mucho tiempo. ¿Llegara a desaparecer la enfermedad?
- Usando ode15s, monitoree a través de un gráfico del número de alumnos sanos en un periodo de una semana.

### Problema 16

En una empresa de cerámica esta instalado un horno de pre-cocido, donde se sujetan las piezas a una variación de temperatura. En el interior del horno, cada pieza de cerámica es transportada a través de una faja rodante. La variación de la temperatura ( $T$  en  $^{\circ}\text{C}$ ), en función de la distancia cubierta ( $x$ , en metros), es descrita por la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{dT}{dx} = 0.1xT^{1.1}$$

Se conoce que  $T(x=0) = 40^{\circ}\text{C}$ , determine la variación de la temperatura de una pieza, para  $x=0:1:3\text{m}$ .

¿Cuántos metros serían necesarios para que la temperatura de la pieza alcance los  $195^{\circ}\text{C}$ ?

### Problema 17

Un perro ve a su dueño caminando recorriendo un camino (inicialmente a 500 metros), y corre hacia él. Si se asume que el perro corre siempre en dirección del dueño y que el camino es rectilíneo, la ecuación que describe la trayectoria ( $x$  e  $y$ , en kilómetro), es:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{R}{x} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Siendo  $R$  la razón entre las velocidades del hombre y del perro. Considerando  $R=0.5$ ,  $y(x=0.5)=0$ ,  $y'(x=0.5)=1$  y  $x=0.5(0.1)1.0$ . ¿al cabo de que distancia (en metros), recorrida por el hombre, el perro llega a alcanzarlo?



Transforme esta ecuación diferencial de segundo orden en un sistema de ecuaciones de primer orden.

¿Cuáles serían los resultados finales si  $R=0.2$ ?

### Problema 18

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones en los 30 primeros segundos

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 10(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= x(20 - z) - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \frac{8}{3}z\end{aligned}$$

- Utilice el método de Runge Kutta de orden 4, intente al menos con 3 valores de  $h$  diferentes.
- Compare sus resultados, usando **ode45** del Matlab usando los mismos valores de  $h$  usados en el ítem a)
- Grafique usando  $x$ ,  $y$  y  $z$  vs  $t$ , usando `plot3`
- Grafique  $x$  vs  $y$ ,  $y$  vs  $z$  y  $z$  vs  $x$
- Varie en forma ínfima a los 3 parámetros del sistema de ecuaciones y discutir los resultados.

### Problema 19

La trayectoria de una partícula que se mueve en el plano está dada por las curvas  $(y_1(t), y_2(t))$ , donde las funciones  $y_1, y_2$  son la solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}y_1'(t) &= -y_2(t) \\ y_2'(t) &= y_1(t) - y_2(t)\end{aligned}$$

Resolver este sistema en el intervalo  $[0, 20]$  con el método de Euler utilizando tamaño de paso  $h=0.05$  y graficar la trayectoria de la partícula, sabiendo que en el tiempo  $t=0$  se encontraba en el punto  $(1, -1)$ . Realizar nuevamente el gráfico utilizando la solución obtenida con el comando **ode45**.

### Problema 20

Analice el comportamiento de ecuaciones stiff.

Para ilustrar en que consiste un problema de estas características, consideremos en primer

lugar la resolución de la siguiente ecuación diferencial

$$y' = -50(y - \cos(t)), \quad 0 \leq t \leq 1.25, \quad y(0) = 0$$

Se pide:

- Demuestre si la EDO tiene solución única usando el Teorema de Lipschitz.

2. Utilizar el método de Euler explícito con pasos  $h = 1.25/31$  y  $h = 1.25/32$  para resolver la ecuación planteada. Representar gráficamente ambos resultados junto con la solución exacta en una misma. ¿Qué se observa?. Comprobar el comportamiento para otros valores de  $h$ , tanto mayores como menores de los antes considerados.
3. Considerar el método de Euler implícito:  $y_{n+1} = y_n + hf(y_{n+1}, t_{n+1})$  para resolver el problema planteado, con un paso  $h = 1.25/31$ . Representar gráficamente el resultado.
4. Discutir la estabilidad de ambos métodos (Euler explícito e implícito) para la resolución de la ecuación diferencial problema.

Lima, 13 de Julio de 2007

**Los Profesores**