Universidad Nacional de Ingeniería **25-05-07**
Facultad de Ingeniería Mecánica **P.A. 2007-1**
Área de Ciencias Básicas y Humanidades

SOLUCIONARIO EXAMEN PARCIAL DE
CALCULO NUMERICO MB-535

Solo se permite el uso de una hoja de formulario

Problema 1

a) Elabore una rutina en Matlab que le permita encontrar el vector de multiplicidad geométrica **"v"** de cada valor propio**.** Debe tener la siguiente cabecera:

function v=mg(A)

Solución

```
function v=mg(A)
syms s
[n,n]=size(A);
l=det(A-s*eye(n));
lam=solve(l);v=[];
for i=1:n
 multi=n-rank(A-lam(i)*eye(n));
 v=[v multi];
end
v=double(v);
```

b) Desarrolle una función llamado **genera(n)**, que genere una matriz de orden n con la siguiente forma:

$$\text{Si n fuera 5} \Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 1 & 12 & 7 \\ 1 & 1 & 13 & 8 & 4 \\ 1 & 14 & 9 & 5 & 2 \\ 15 & 10 & 6 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución

```
function A=genera(n)
clc
i=n;j=n;
A=ones(n);
for k=1:(n*n/2+n/2)
   A(i,j)=k;
   if (i==n)
      i=j-2;
      j=n+1;
   end
   i=i+1;
   j=j-1;
end
```

c) Considere la ecuación $\dfrac{2-x^3}{\sqrt{x}}=0$. Encuentre un intervalo de longitud unitaria donde se localiza la raíz y determine el número de iteraciones necesarias utilizando el método de la bisección para obtener la raíz aproximada con tres cifras decimales exactas.

Solución

$$|e_n| \le \frac{b-a}{2^n}$$

$$|e_n| \le \frac{2-1}{2^n} < 0.5*10^{-3} \Rightarrow \frac{1}{0.5}*10^3 < 2^n$$

$$\Rightarrow 2^n > 2000$$

$$n > 10$$

El número de iteraciones necesarias es n=11.

d) Exprese el mayor valor positivo no normalizado en el sistema de simple precisión según IEEE-754.

Solución

X= 0.11111111111111111111111x2^{-126}

0 00000000 11111111111111111111111

Problema 2

Se desea resolver el siguiente sistema:

$$p-3q+5r=5$$
$$8p-q-r=8$$
$$-2p+4q+r=4$$

a) Analice la convergencia del sistema para Gauss-Seidel

b) Realice 03 iteraciones de Gauss-Seidel a partir de un vector nulo. Si no fuera convergente transfórmelo en un sistema equivalente donde si lo sea.

c) Estime el error y comente sus resultados

Solución

a)

$$Tg=(D-L)^{-1}U=\begin{bmatrix}0 & 3 & -5\\ 0 & 24 & -41\\ 0 & -90 & 154\end{bmatrix}$$

$$\rho(Tg) = 177.9663 > 1$$

No hay convergencia

b) Permutando filas de tal manera que exista diagonal estrictamente dominante:

$$\begin{aligned} 8p - q - r &= 8 \\ -2p + 4q + r &= 4 \\ p - 3q + 5r &= 5 \end{aligned}$$

$$Tg = \begin{bmatrix} 0 & 0.125 & 0.125 \\ 0 & 0.0625 & -0.1875 \\ 0 & 0.0125 & -0.1375 \end{bmatrix} \quad Cg = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 1.7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= [0 \quad 0 \quad 0]^T \\ x^{(1)} &= Tg\, x^{(0)} + Cg = [1 \quad 1.5 \quad 1.7]^T \\ x^{(2)} &= [1.4 \quad 1.275 \quad 1.485]^T \\ x^{(3)} &= [1.3450 \quad 1.3013 \quad 1.5118]^T \end{aligned}$$

c)

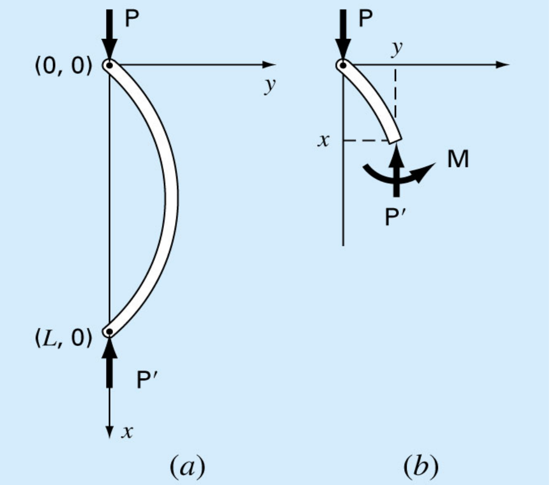
$$err = \left\| x^{(3)} - x^{(2)} \right\|_{\infty} = 0.0666$$

$$err = \left\| x^{(3)} - x^{(2)} \right\|_{2} = 0.0550$$

La convergencia es rápida

Problema 3

Consideremos una columna de longitud L, sujeta a una carga axial P como se muestra en la figura.



(a) (b)

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{M}{EI} \\ M = -Py \end{cases} \qquad (1)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{P}{EI} y = -p^2 y$$

$$y(0) = y(L) = 0$$

La solución de (1)

$$y = A\sin px + B\cos px$$

$$\begin{cases} y(0) = B = 0 \\ y(L) = A\sin pL = 0 \end{cases} \Rightarrow pL = n\pi,\ n = 1,2,\cdots$$

Las cargas de deformación P en forma exacta.

$$P = p^2 EI = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2}$$

Usando el método de las diferencias finitas para aproximar la EDO. (1)

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h_i^2} + p^2 y_i = 0 \ \Rightarrow -y_{i-1} + (2 - h^2 p^2)y_i - y_{i+1} = 0 \qquad (2)$$

Usando la ecuación (2)

a) Encuentre usando el método directo los valores y vectores propios si h_i=L/3. ¿Que puede decir acerca de los resultados?
b) Usando hi=L/5, con L=1, encuentre la aproximación al valor de p dominante y su respectivo valor propio, usando el método de la potencia. Realice solo 03 iteraciones. Inicialice con un vector arbitrario de preferencia el vector con unos en la primera y segunda posición el resto ceros. ¿ Que puede decir de la convergencia del método?.

Solución

a) Desarrollando la ecuación 2:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda\, I) = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$\varepsilon(A) = \{1, 3\}$$

Donde $\lambda = h_i^2 p^2$

$$p = \sqrt{\lambda}/h_i, \quad h_i = L/3$$

$$p = \frac{3\sqrt{3}}{L} \quad p = \frac{3}{L}$$

$$\lambda = 3$$

$$(A - 3I)x_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 1$

$$(A - I)x_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b)

x0=[1 1 0 0]^t

$$A = \begin{matrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{matrix}$$

X1=A*X

X1	u	X
1 1 -1 0	1	1 1 -1 0
1 2 -3 1	-3	-1/3 - 2/3 1 -1/3
0 -2 3 -5/3	3	0 -2/3 1 -5/9
2/3 -7/3 29/9 -19/9	3.22	6/29 -21/29 1 -19/29

Problema 4

La ecuación $4x^3 + 4x^2 - 1 = 0$, tiene en el intervalo [0.2, 1], una única raíz α.

a) Verifique que α es punto fijo de la función $\varphi(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

b) Pruebe que la sucesión x_n definida por:

$$\begin{cases} x_0 = 0.2 \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2\sqrt{x_n + 1}}, \quad n \geq 0 \end{cases}$$

Converge para α

c) Determine x_2 e indique el número de cifras decimales significativas que puede garantizar para x_2.

d) A partir de que iteración podrá garantizar, por lo menos, 5 cifras decimales significativas una aproximación de α ?

Solución

a) Como α es raíz de la ecuación $4x^3 + 4x^2 - 1 = 0$ entonces $4\alpha^3 + 4\alpha^2 - 1 = 0$
De este modo

$$4\alpha^3 + 4\alpha^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 4\alpha^2(\alpha+1) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha^2(\alpha+1) = 1 \Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{1}{4(\alpha+1)} \underset{\substack{\alpha\in[0.2,\ 1] \\ (\alpha>0)}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2\sqrt{\alpha+1}} = \varphi(\alpha)$$

Por lo tanto α es punto fijo de la función $\varphi(n) = \dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}$ pues $\varphi(\alpha) = \alpha$

b) Es necesario verificar que la función $\varphi(n) = \dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}$ satisface en el intervalo [0.2, 1] las condiciones del teorema del punto fijo

i) φ es continua en [0.2, 1] pues [0.2, 1] ⊂ ⟨-1,∞⟩

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{4(x+1)^{3/2}} < 0, \quad \forall x \in [0.2,1]$$

$$\Rightarrow \varphi(x) \text{ es estrictamente descendente en } [0.2,1]$$

ii) $$\Rightarrow \underbrace{\varphi(1)}_{0.35355} \le \varphi(x) \le \underbrace{\varphi(0.2)}_{0.45643..}$$

$$\Rightarrow \varphi(x) \in [0.35, 0.46] \subseteq [0.2,1]$$

iii) $$|\varphi'(x)| = \left|\frac{-1}{4(x+1)^{3/2}}\right| = \frac{1}{4(x+1)^{3/2}} \le \frac{1}{4(0.2+1)^{3/2}} < 0.2 = k < 1$$

Como satisface i) , ii) y iii) la sucesión converge.

c) Como $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, n= 0, 1, 2, .., se tiene

$$x_1 = \varphi(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{0.2+1}} = \frac{1}{2\sqrt{1.2}} = 0.456435..$$

$$x_2 = \varphi(x_1) = \frac{1}{2\sqrt{0.456435+1}} = 0.414309$$

Luego

$$|\alpha - x_n| \le \frac{k}{1-k}|x_n - x_{n-1}| \quad \text{por lo que}$$

$$|\alpha - x_2| \le \frac{k}{1-k}|x_2 - x_1| \le \frac{0.2}{1-0.2} * 0.043$$

$$= 0.01075 < 0.05 = 0.5 * 10^{-1}$$

Podemos garantizar, para x_2, por lo menos con 1 cifra decimal significativa

d) Se pretende determinar el menor número de iteraciones que satisface la condición

$\left|\alpha - x_n\right| \le 0.5*10^{-5}$

Se sabe que

$$\left|\alpha - x_n\right| \le \frac{k^n}{1-k}\left|x_0 - x_1\right| \le 0.5*10^{-5} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(0.2)^n}{0.8}*\left|0.2 - 0.456435\right| \le 0.5*10^{-5}$$

$$\Leftrightarrow (0.2)^n \le \frac{0.5*10^{-5}*0.8}{\left|0.2 - 0.456435\right|} \Rightarrow n \ge 6.87$$

Con 7 iteraciones se garantiza por lo menos 5 c.d.s.

Los Profesores