

**CALCULO NUMERICO (MB535)**  
**SEGUNDA PRACTICA CALIFICADA (PARTE A)**

**INDICACIONES**

1. Resolver las preguntas según la tabla siguiente:

SECC.	PROBLEMAS		
A	1	5	9
C	2	6	10
D	3	7	11
E	4	8	12

2. Se formarán grupos de uno o dos alumnos correspondientes a la misma sección.
3. Si se detecta dos trabajos idénticos tendrán calificativo CERO.
4. Presentar un informe adjuntando su diskette respectivo.
5. Contenido del informe:
  - Análisis del problema
  - Implementación de los algoritmos (listados de programas) y prueba
  - Conclusiones y recomendaciones

**FECHA DE ENTREGA:**

Día : Jueves, 15 de Febrero del 2007  
Hora : 16:00 horas  
Lugar : Oficina de Horarios

**ASESORIA**

Prof. Castro	Lunes	19-20	Of. de Horarios
	Martes	14-16	
Prof. Pantoja	Lunes	12- 14	Of. A1-204
	Martes	15 - 16	

**PARTE B (Test)**

Día : Sábado 10/02/2007  
Hora : 12 -13  
Aulas : A2- 167 sección A-C  
A2 -166 sección D-E

### Problema 1

Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x - 3y + 5z = 5 \\ 8x - y - z = 8 \\ -2x + 4y + z = 4 \end{cases}$$

- (a) Al resolver por el método de Gauss-Seidel, utilizando MatLab, el sistema se detiene, indicar en que iteración se obtiene como solución (Inf,Inf,Inf). Explique porque.
- (b) ¿Existe alguna condición suficiente que deba cumplir la matriz del sistema para garantizar la convergencia del método de Gauss-Seidel?. Hacer uso de ella para modificar el sistema de forma que el proceso sea convergente.
- (c) Aproxime la solución del sistema lineal con una exactitud de  $10^{-8}$  en la norma infinita utilizando:
  - c1) El método de Jacobi, y
  - c2) El método SOR con  $w = 1.25$

### Problema 2

Sea el sistema:

$$-y_{k-1} + 2y_k - y_{k+1} = \frac{8}{(n+1)^2}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

Cuya solución matemática:

$$y_k = 4 \left[ \frac{k}{n+1} - \left( \frac{k}{n+1} \right)^2 \right].$$

$$y_0 = y_{n+1} = 0.$$

Implemente rutinas en MatLab., para  $n=10$  y  $20$ :

- (a) Analice el condicionamiento para cada caso.
- (b) Resuélvase mediante el método de Jacobi hasta tener 8 c.d.e.
- (c) Resuélvase mediante el método de Gauss-Seidel hasta tener 8 c.d.e.
- (d) Resuélvase mediante el método de Sobre-Relajación hasta tener 8 c.d.e usando el  $w$  óptimo.
- (e) Resuélvase mediante el operador “\”
- (f) Compare las aproximaciones obtenidas con la solución exacta y comente sus resultados.

### Problema 3

Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 23 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 9 \\ 1 & 100 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 114 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 144 & 0 & 6 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 44 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 4 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 1 & 1 & 133 & 9 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 & 0 & 1 & 2 & 9 & 11 & 7 \\ 9 & 0 & 0 & 1 & 9 & 0 & 1 & 0 & 7 & 100 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \text{sen}(0.505) \\ e^{2.50} \\ 300.00 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Analice el condicionamiento de la matriz.
- Resuélvase mediante el método de Jacobi hasta tener 8 c.d.e.
- Resuélvase mediante el método de Gauss-Seidel hasta tener 8 c.d.e.
- Resuélvase mediante el método de Sobre-Relajación hasta tener 8 c.d.e usando el  $w$  óptimo.
- Resuélvase mediante el operador “\”
- Compare las aproximaciones obtenidas con la solución exacta y comente sus resultados

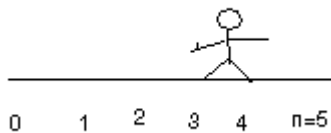
### Problema 4

Sea el sistema:

$$x_k = \left(\frac{3}{4}\right)x_{k-1} + \left(\frac{1}{4}\right)x_{k+1} \quad k = 1 \dots n-1$$

$$x_0 = 1 \quad x_n = 0$$

Que se puede interpretar como representar un caminante que se mueve al azar, hacia la izquierda con frecuencia triple que hacia la derecha, sobre una línea con posiciones numeradas de 0 a n. Parte de la posición 0 y cuando llega a la posición  $n$  se detiene.  $x_k$  representa la probabilidad de ubicarse en el punto k.



Implemente rutinas en MatLab., para  $n=10$  y  $20$ .

- Analice el condicionamiento para cada caso.
- Resuélvase mediante el método de Jacobi hasta tener 4 c.d.e.
- Resuélvase mediante el método de Gauss-Seidel hasta tener 8 c.d.e.
- Resuélvase mediante el método de Sobre-Relajación hasta tener 8 c.d.e usando el  $w$  óptimo.

### Problema 5

Considérese el problema de Sturm-Liouville siguiente:

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, x \in [0, 1], y(0) = y(1) = 0$$

Discretizando el problema anterior con  $n$  variable con paso  $h=1/(n+1)$  y aproximando la derivada segunda mediante las diferencias finitas centrales, resulta el siguiente problema de valores propios en dimensión finita:

$$y_0 = 0, y_{n+1} = 0, \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + \lambda y_k = 0, k=1, 2, \dots, n$$

donde  $y_k$  es una aproximación a  $y(kh)$ .

Se pide:

- Hallar los valores propios del problema de contorno anterior, usando el método directo para  $n=5$ .
- Encuentre los vectores propios del sistema ( $y_k$ ) para a).
- Hacer el programa en MatLab. que resuelva este problema usando el método de la potencia directo, inverso y con desplazamiento para encontrar todos los valores y vectores propios.

### Problema 6

Sea el sistema de dos masas y tres resortes sin disipación ni fuerzas externas:

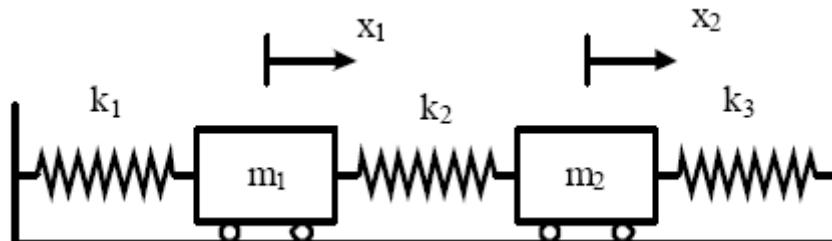


Fig 1: Sistema vibratorio de dos masas y tres resortes

Las ecuaciones de la segunda ley de Newton para cada una de las masas:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_3 x_2 - k_2 (x_2 - x_1)$$

- Reacomode el sistema a la forma matricial  $MX'' + KX = 0$ ,  $X = [x_1; x_2]$
- Las frecuencias de las masas en vibración se determinan encontrando los valores propios de la matriz  $M^{-1}K$ . Localice todos los valores propios utilizando los círculos de Gerschgorin

- (c) Calcule todos los valores y vectores característicos en forma analítica para los datos siguientes:  $k_1 = k_2 = 2 \text{ kg / s}^2$   $k_3 = 1 \text{ kg / s}^2$
- (d) Hacer el programa en MatLab. que resuelva este problema usando el método de la potencia directo, inverso y con desplazamiento para encontrar todos los valores y vectores propios.

### Problema 7

Sea una estructura de tres “pisos” de masas  $m_1, m_2, m_3$ , interconectados entre si y con el suelo por medio de unos elementos elásticos  $k_1, k_2, k_3$ , siendo posibles sólo los desplazamientos transversales  $x_1, x_2, x_3$

Las ecuaciones de la segunda ley de Newton para cada una de las masas son las siguientes

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1(x_1 - x_2)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_2(x_2 - x_3) - k_1(x_2 - x_1)$$

$$m_3 \frac{d^2 x_3}{dt^2} = -k_3 x_3 - k_2(x_3 - x_2)$$

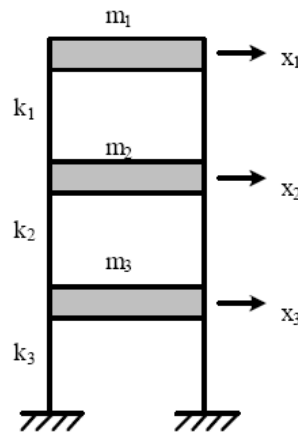


Fig2. Sistema de 3 pisos

- (a) Reacomode el sistema a la forma matricial  $MX'' + KX = 0$ ,  $X = [x_1; x_2; x_3]$
- (b) Las frecuencias de las masas en vibración se determinan encontrando los valores propios de la matriz  $M^{-1}K$ . Localice todos los valores propios utilizando los círculos de Gerschgorin
- (c) Calcule todos los valores y vectores característicos en forma analítica para los datos siguientes:  $k_1 = k_2 = 2 \text{ kg / s}^2$   $k_3 = 1 \text{ kg / s}^2$
- (d) Hacer el programa en MatLab. que resuelva este problema usando el método de la potencia directo, inverso y con desplazamiento para encontrar todos los valores y vectores propios.

### Problema 8

Dada las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 + 3i & 2 - 3i & -5 + 3i \\ -2 & -1 & -3 \\ 1 - 2i & -1 + 2i & 2 - 2i \end{pmatrix}.$$

- (a) Dibujar los círculos de Gersgorin por filas y columnas correspondiente a las matrices:
- (b) Halle los valores propios de esas matrices y comprobar que están contenidas en la unión de esos círculos.
- (c) Obtener todos los valores y vectores propios mediante el método de la potencia directa, inversa e inversa con desplazamiento eligiendo tolerancias y valores iniciales adecuados, para ello implemente programas en MatLab.

### Problema 9

Dada la ecuación  $e^{-x^2} - \frac{x^2 - 7x + 7}{10(x-1)^2} = 0$ , se pide:

- (a) Estudiar gráficamente sus raíces.
- (b) Demostrar que para cualquier  $x > 1.6$  es  $f'(x) < 0$  y  $f''(x) > 0$
- (c) Calcular la mayor de las raíces, con dos cifras decimales exactas, por el método de Newton.
- (d) Resuelva con la función fzero de MatLab
- (e) Encuentre un algoritmo de punto fijo convergente y luego resuelva con una precisión de 0.0005

Para cada caso escriba sus rutinas propias de MatLab.

### Problema 10

Suponga que un objeto de masa  $m$  se deja caer desde una altura  $S_0$  y que la altura del objeto, con respecto al suelo, a los  $t$  segundos viene dada por :

$$S(t) = S_0 + \frac{mg}{k}t - \frac{m^2g}{k^2} \left( 1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right)$$

Donde  $S_0=300$  pies,  $m=0.25$  Slugs,  $g=-32.17$  pies/s<sup>2</sup> y  $k=0.1$  lb-s/pie  
 Determine el tiempo que tarda ese objeto en llegar al suelo.

- (a) Localice las raíces
- (b) Resuelva con la función fzero de MatLab.
- (c) Resuelva por bisección con 4 c.d.e.
- (d) Realice 05 iteraciones de Newton, cual es la precisión de esta aproximación
- (e) Encuentre un algoritmo de punto fijo convergente y luego resuelva con una precisión de 0.001.

Para cada caso escriba sus rutinas propias en MatLab.

### Problema 11

Dada la ecuación  $e^x - (x+1)^2 = 0$ , se pide

- (a) Estudiar gráficamente sus raíces reales.
- (b) Obtener la mayor de ellas con dos cifras decimales exactas por el método de la bisección.
- (c) Resuelva con la función fzero de MatLab
- (d) Obtener con seis cifras decimales exactas por el método de Newton.

- (e) Encuentre un algoritmo de punto fijo convergente y luego resuelva con una precisión de 0.0005.

Para cada caso escriba sus rutinas propias de MatLab.

**Problema 12**

Sea la ecuación  $\text{Sen}(x) + \text{Ln}(x) = 0$

- (a) Localice las raíces
- (b) Resuelva con la función fzero de MatLab
- (c) Resuelva por bisección con 6 c.d.e.
- (d) Resuelva por Newton, hasta tener 10 cifras decimales exactas.
- (e) Encuentre un algoritmo de punto fijo convergente si es que existe y luego resuelva con una precisión de 0.00001.

Para cada caso escriba sus rutinas propias en MatLab.

**Los Profesores**