Universidad Nacional de Ingeniería **21-10-06**
Facultad de Ingeniería Mecánica **P.A. 2006-2**
Área de Ciencias Básicas y Humanidades

SOLUCIONARIO DE LA SEGUNDA PRÁCTICA DE CALCULO NUMERICO
PARTE B

Apellidos y Nombres	Código	Sección	Nota

SE PERMITE UNA HOJA DE FORMULARIO.

Marque la alternativa que considere correcta o complete según el caso:

Problema 1

Sea el sistema Lineal: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix}$

1.1)¿Cúal es el valor del radio espectral de T de Jacobi para el sistema?

$\boxed{\text{a) } \sqrt{3}}$ b) $\sqrt{2}$ c) 0.5 d) $\boxed{1/\sqrt{3}}$ e) $1/\sqrt{2}$

1.2) Para un valor inicial de $[1\ ,1]^t$ el método converge después de dos iteraciones al vector más cercano a:

a) $\begin{bmatrix} 3.0000 \\ 1.6667 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$ d) $\boxed{\begin{bmatrix} 2.3333 \\ 1.0000 \end{bmatrix}}$ e) $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Problema 2

Sea el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

para que valor de a, el sistema puede ser resuelto mediante el método de sobrerelajación sucesiva (SOR) usando $\varpi\ optimo = 1.25$.

Solución

$$a = \frac{4}{5}\sqrt{2} = 1.1314$$

Problema 3

3.1) Considere el siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} 5 & 80 & 10 \\ 80 & 10 & 30 \\ 16 & 20 & 60 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -150 \\ 75 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Podría garantizar la convergencia del sistema para algún método iterativo?. Justifique su respuesta.

Solución:
Haciendo un cambio de filas(1era por segunda), la Matriz A es diagonal estrictamente dominante por filas, luego podemos garantizar la convergencia ya sea del método de Jacobi o Gauss Seidel

3.2) Dada las siguientes afirmaciones:
   a) Si A, una matriz cuadrada, no es estrictamente diagonalmente dominante por filas entonces el método de Jacobi no converge.
   b) El método de Gauss-Seidel siempre converge más rápido que el método de Jacobi.
   c) El método de Jacobi es un caso particular del método de SOR.
   d) Todas son falsas

   Seleccione la(s) correcta(s)

Respuesta : $\boxed{\mathbf{d}}$

Problema 4

Considerando la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Determine sus autovalores, multiplicidad algebraica y geométrica.

Solución:

$$|A-\lambda I| = \left|\begin{bmatrix} 0-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0-\lambda & 1 \\ -2 & 3 & 0-\lambda \end{bmatrix}\right| = -\lambda^3 - 2\lambda + 3$$

m.a.(λ_1=1) = 2   m.a. = Multiplicidad algebraica.
m.a (λ_2=-2) =1

m.g. (λ_1=1) = 3- rango(A- I) = 1   m.g. = Multiplicidad geométrica
m.g.(λ_2=-2)= 3- rango(A+2I) = 1

Problema 5

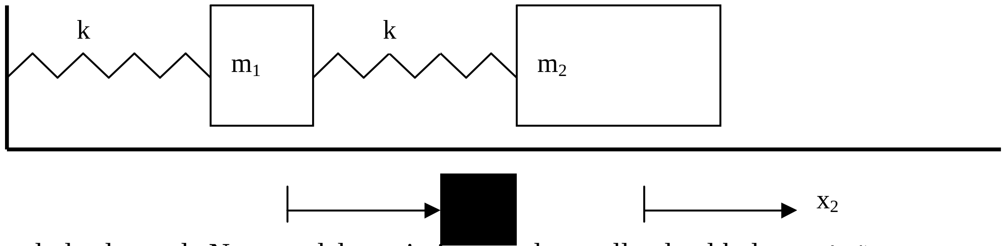
Si la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ es diagonalizable satisface $P^{-1}AP = D$, escriba P y D para este caso:

Solución

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Problema 6

Observe el sistema de masa –resorte



Aplicando las leyes de Newton del movimiento y desarrollando el balance de fuerzas para cada masa tenemos:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -kx_1 + k(x_2 - x_1)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k(x_2 - x_1)$$

$m_1 = 1, m_2 = 2, k = 1.5$ (Constante del resorte)

La solución del problema anterior es de la forma:

$x_i = A_i Sin\ (\omega t - \emptyset)$ i=1,2

Donde: A_i = amplitud de la vibración de la masa 'i'

ω =frecuencia de la vibración

$\emptyset$ = ángulo de fase

Entonces

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -A_i w^2 Sin(\omega t - \emptyset)$$

Sustituyendo x_i y $\frac{d^2 x_i}{dt^2}$ en ecuaciones,

$-A_1 \omega^2$ –1.5(-2A_1 + A_2) = 0

$-2A_2 \omega^2$ –1.5(A_1 - A_2) = 0

Ordenando en forma matricial, las ecuaciones pueden ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 + 3 & -1.5 \\ -0.75 & -\omega^2 + 0.75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hacer $\omega^2 = \lambda$

Encuentre por el método de la potencia una aproximación a la mayor frecuencia y su vector de amplitudes correspondiente.

Solo realice 02 iteraciones $x^{(o)}=[1\ ,0]^t$

Solución :

$$\begin{bmatrix} 3 & -1.75 \\ -0.75 & 0.75 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -0.75 \end{bmatrix} \qquad \mu_1=3 \qquad x^{(1)}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1/4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1.75 \\ -0.75 & 0.75 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.3750 \\ -0.9375 \end{bmatrix} \qquad \mu_2=-3.3750 \qquad x^{(2)}=\begin{bmatrix} 1 \\ -0.2778 \end{bmatrix}$$

Valores exactos $\lambda=3.4212$ $\quad x=\begin{bmatrix} 1 \\ -0.2808 \end{bmatrix}$

Problema 7

Dada una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, demostrar que la suma de los valores propios de A es igual a la traza de A y el producto de sus valores propios es igual al determinante de A.

Solución:

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc$$

Por lo tanto

$$\sum \lambda = a + d$$
$$\prod \lambda = ad - bc$$

Problema 8

Dada la función $g(x) = \dfrac{5x(1-x)}{2}$

7.1) Para que valor de x , es punto fijo de g

Solución:

$x = 0 \quad y \quad x = 0.6$

7.2) Podría asegurar la convergencia del método del punto fijo en el intervalo [0.5,0.68]. Justifique su respuesta

Solución

- $g([0.5,0.68]) \subseteq [0.5,0.68]$
  $g(0.5) = 0.625 < 0.68$
  $g(0.68) = 0.544 > 0.5$
- $|g'(x)| \leq 0.9 < 1 \quad \forall x \in [0.5,0.68]$

Problema 9

Dada la ecuación $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$. Cuál o cuáles de las siguientes formas son divergentes para el método de iteración de punto fijo, partiendo de $x_0 = 3$?

a) $g_1(x) = x^2 - 2$
b) $g_2(x) = \sqrt{x+2}$
c) $g_3(x) = 1 + \frac{2}{x}$
d) $g_4(x) = \frac{x^2+2}{2x-1}$

Respuesta : $\boxed{\text{a}}$

Problema 10

La raíz de la ecuación $f(x) = 0$ es encontrada usando el método de Newton-Raphson. El estimado inicial de la raíz es $x_0 = 3$, $f(3) = 5$. El ángulo de la tangente de la función f(x) en x=3 es 570. La siguiente estimación a la raíz es, x1 lo más cercano posible

a) –3.2470 $\boxed{\text{b) } -0.2470}$ c)3.2470 d) 6.2470

Los Profesores