UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA **Ciclo :2006-1**
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA
AREA ACADEMICA DE CIENCIAS BASICAS

CALCULO NUMERICO (MB535)
SEGUNDA PRACTICA CALIFICADA (PARTE A)

INDICACIONES

1. Resolver las preguntas según la tabla siguiente:

SECC.	PROBLEMAS		
A	2	3	1
C	5	4	7
D	6	8	10
E	11	9	1
F	2	3	7
G	5	4	10
H	6	8	1
I	11	9	7
J	6	3	10

2. Se formarán grupos de uno o dos alumnos correspondientes a la misma sección.
3. Si se detecta dos trabajos idénticos tendrán calificativo CERO.
4. Presentar un informe adjuntando su diskette respectivo.
5. Contenido del informe:
   - Análisis del problema
   - Implementación de los algoritmos (listados de programas) y prueba
   - Conclusiones y recomendaciones

FECHA DE ENTREGA:

Día : Viernes, 19 de Mayo del 2006
Hora : 12:00 horas
Lugar : Laboratorio de Computo

ASESORIA

Prof. Garrido	Miércoles	11-12	Of : A1-254
	Lunes	10-12	
Prof. Castro	Lunes	14-15	Of. de Horarios
	Miércoles	14-16	
Prof. Pantoja	Martes	10-12	Of. A1-204
	Miércoles	16-17	

PARTE B (Test)

Día : Sábado 20/05/2006
Hora: 12 horas
Aulas: Se publicará

Problema 1

1a). Sea el sistema de dos masas y tres resortes sin disipación ni fuerzas externas:

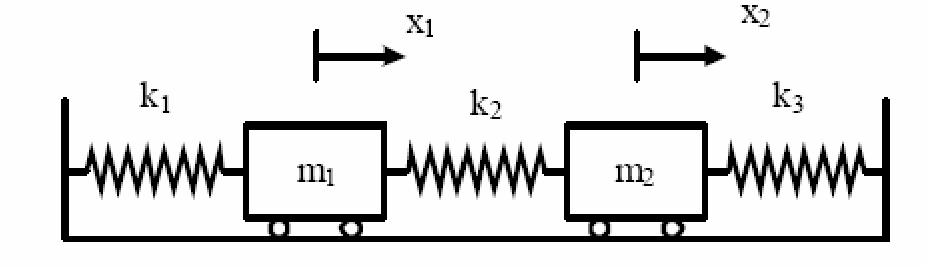


Fig 1: Sistema vibratorio de dos masas y tres resortes

Las ecuaciones de la segunda ley de Newton para cada una de las masas:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2)$$
$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_3 x_2 - k_2 (x_2 - x_1)$$

a) Escribir las dos ecuaciones en su forma matricial de la forma:

$$M\ddot{X} + KX = 0$$

Siendo:

$$X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

b) Encontrar las frecuencias de las masas en vibración que se determinan encontrando los valores propios de la matriz $M^{-1}K$, Suponiendo m1 = 5kg, m2 = 10kg, k1 = 2N/m, k2 = 2N/m, k3 = 4N/m, use el método directo y los métodos iterativos de la potencia directo e inverso.

c) Localice los valores propios utilizando el teorema de Gershgorin.

1b) Sea una estructura de tres "pisos" de masas m_1, m_2, m_3, interconectados entre si y con el suelo por medio de unos elementos elásticos k_1, k_2, k_3, siendo posibles sólo los desplazamientos transversales x_1, x_2, x_3 :

Las ecuaciones de la segunda ley de Newton para cada una de las masas:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 (x_1 - x_2)$$
$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 (x_2 - x_3) - k_1 (x_2 - x_1)$$
$$m_3 \ddot{x}_3 = -k_3 x_3 - k_2 (x_3 - x_2)$$

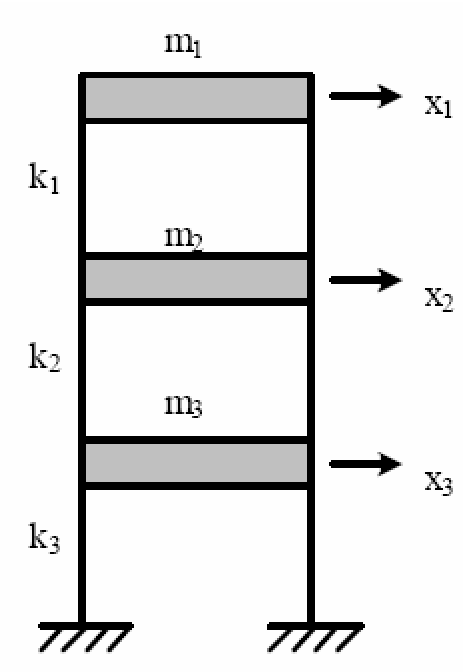


Fig. Sistema de 3 pisos

a) Escribir las dos ecuaciones en su forma matricial de la forma:

$$M\ddot{X} + K X = 0$$

Siendo:

$$X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

b) Encontrar las frecuencias de las masas en vibración que se determinan encontrando los valores propios de la matriz $M^{-1}K$, Suponiendo m1 = m2 = m3=m=k1 = k2=k3, use el método directo y los métodos iterativos de la potencia directo e inverso.
c) Localice los valores propios utilizando el teorema de Gershgorin.

Ejm código: 2001004$\underline{\alpha}$J ➔ a este código le corresponde la aplicación **1a** si **α<5** caso contrario la aplicación **1b** (Elegir el código del alumno mas antiguo).

Problema 2

Consideremos dos planetas del sistema solar cuyas órbitas elípticas alrededor del Sol están en un mismo plano. Kepler(1521-1630) demostró que el Sol es uno de los focos de las elipses.

Sean

$$P_1(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} \text{ y } P_2(t) = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix},$$

la localización de dos planetas en órbitas elípticas alrededor del Sol al tiempo *t* (en días). Suponemos que las coordenadas del Sol son (0; 0).

Se dice que los dos planetas están en *conjunción* si los dos planetas y el Sol son colineales y el Sol está en un extremo. Si los tres astros son colineales y el Sol está en medio se dice que los dos planetas están en *oposición*.

a. Sea *f(t)* el seno del ángulo entre un planeta, el Sol y el otro planeta al tiempo *t*. Muestre que

$$f(t) = \frac{x_1(t)y_2(t) - x_2(t)y_1(t)}{\|P_1(t)\|_2 \; \|P_2(t)\|_2},$$

b. Las ecuaciones de Mercurio son

$$P_1(t) = \begin{bmatrix} -11.9084 + 57.911\cos(2k\pi t / 87.97) \\ 56.6741\sin(2k\pi t / 87.97) \end{bmatrix}$$

y las de la Tierra son

$$P_2(t) = \begin{bmatrix} -2.4987 + 149.6041\cos(2k\pi t / 365.25) \\ 149.5832\sin(2k\pi t / 365.25) \end{bmatrix}$$

Se pide escribir una función en MatLab que tenga la siguiente cabecera

function $s = mercutierra(t)$
% Esta función es el seno del ángulo formado por Mercurio, el Sol y la Tierra
% al tiempo t.
%
% In
% t .- vector de longitud n.
%
% Out
% s .- vector de longitud n tal que $s(k) = f(t(k))$, $k = 1 : n$.

c. Grafique mercutierra.m en [0; 1115] para notar cuantas conjunciones existen entre estos planetas en 1115 días.

.

d. Escriba un script file en MATLAB que determine los días en que ocurren las conjunciones entre [0; 1115]. Usted debe usar una función en MATLAB que resuelva ecuaciones no-lineales. La función es elección de usted, pero debe ser una función escrita por usted. La salida debe ser; una gráfica con la función en [0; 1115] y un listado con:

Número de Conjunción	t (Tiempo)	Espaciamiento

Escoger $k \neq 0$ igual al penúltimo caracter del código del alumno.
Ejm código: 2001004<u>7</u>J ➔ $k = 7$, si ese código fuera cero sumarle 1.
Si el grupo esta conformado por dos alumnos escoger un código de uno de los integrantes.

Problema 3

<u>Circulación sobre una red vial</u>

El mapa que aparece en la figura siguiente muestra algunas de las calles del centro de Montevideo hacia el año 2050, con los nuevos nombres que tendrán por esas fechas. El sentido de circulación en cada una de ellas está indicado por las flechas.

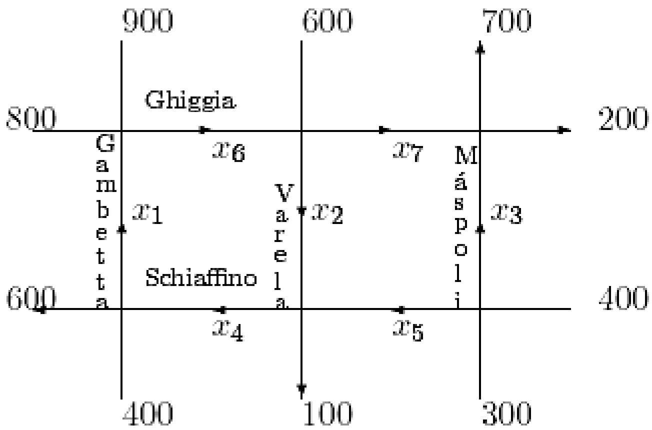


Fig. 1 Algunas calles del centro de Montevideo

Las unidades de vehículos que entran y salen en cada intersección:

U=[10α 20α 30α 40α 60α 70α 80α 90α], en este caso α=10

En el mapa se indica el flujo de tránsito que entra o sale a cada calle, en unidades de vehículos por hora. Ya que el flujo de tránsito varía considerablemente durante el día supondremos que los números mostrados representan el flujo de tránsito promedio a la hora de mayor circulación.

Sea x_i la cantidad de vehículos por hora que circulan por cada una de las cuadras en la parte de la ciudad que estamos considerando:

Variable	Vehículos por hora que circulan por
x_1,	Gambetta desde Schiaffino hacia Ghiggia,
x_2,	Varela desde Ghiggia hacia Schiaffino,
x_3,	Máspoli desde Schiaffino hacia Ghiggia,
x_4,	Schiaffino desde Varela hacia Gambetta,
x_5,	Schiaffino desde Máspoli hacia Varela,
x_6,	Ghiggia desde Gambetta hacia Varela,
x_7,	Ghiggia desde Varela hacia Máspoli.

En cada intersección el tráfico de entrada debe ser igual al de salida, de modo que las circulaciones en cada cuadra deben satisfacer ecuaciones que reflejan esta propiedad.

a) Escribir el sistema de sistema ecuaciones en forma matricial de manera tal que pueda aplicarse un método iterativo.
b) Aproxime la solución del sistema lineal con una exactitud de 10^{-6} en la norma infinita utilizando:
   b1) el método de Gauss Seidel,
   b2) el método de Jacobi, y
   b3) el método SOR con w = 1.25.

Ejm código: 2001004<u>7</u>J → $\alpha = 7$, si ese código fuera cero sumarle 1.
Si el grupo esta conformado por dos alumnos escoger un código de uno de los integrantes.

Problema 4

Los armazones son estructuras ligeras capaces de soportar cargas pesadas.
En el diseño de puentes, los miembros de la estructura están conectados con juntas rotativas de pasador que permiten transferir las fuerzas de un miembro a otro.
La figura anexa muestra una estructura que se mantiene estacionaria en el extremo inferior izquierdo (nodo 1), que se desplaza horizontalmente en el extremo inferior derecho (nodo 4) y que tiene juntas de pasador en los nodos 1, 2, 3, y 4. Si se coloca una carga de 104 newtons (N) en el nodo 3 se generan las fuerzas de magnitud f_1, f_2, f_3, f_4, y f_5 que actúan sobre los miembros de la estructura como se indica en la figura. El soporte estacionario del nodo 1 tiene una fuerza horizontal de magnitud F1 y una fuerza vertical F2, mientras que el soporte móvil tiene únicamente una fuerza vertical de magnitud F3.

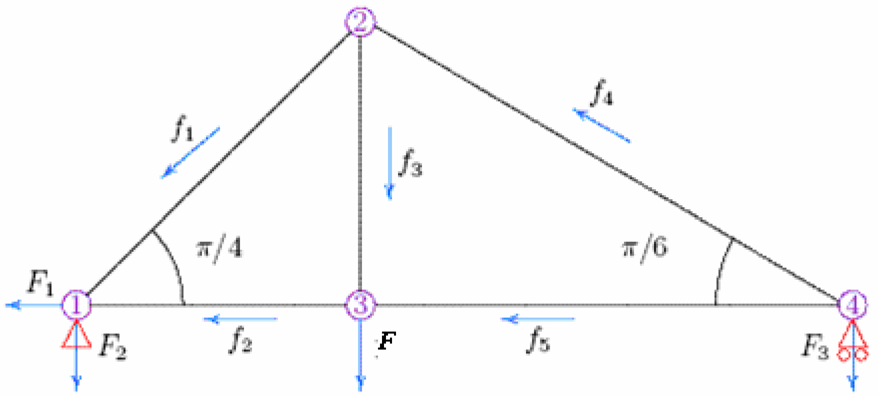


Figura 1: Gráfico del Problema 1.

Si la estructura está en equilibrio estático, la suma de las fuerzas en los nodos debe ser cero. Por ejemplo en el nodo 1,

$$-F_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} f_1 + f_2 = 0 \ \ (componente\ horizontal),$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} f_1 - F_2 = 0 \ \ (componente\ vertical).$$

F=(10000 *α/2) N

a) Escriba las ecuaciones para los nodos restantes.
b) Exprese el sistema de ecuaciones lineales obtenido en el inciso anterior en forma matricial de manera tal que pueda aplicarse un método iterativo.
c) Aproxime la solución del sistema lineal con una exactitud de 10−2 en la norma infinita utilizando:
c1) el método de Gauss Seidel,
c2) el método de Jacobi, y
c3) el método SOR con w = 1.25.

Ejm código: 20010047J ➔ $\alpha = 7$, si ese código fuera cero sumarle 1.

Si el grupo esta conformado por dos alumnos escoger un código de uno de los integrantes.

Problema 5

En el diseño de los vehículos para todo tipo de terreno, es necesario tener en cuenta las fallas cuando se intenta librar dos tipos de obstáculo. Una es la falla por rozamiento, y ocurre cuando el vehículo intenta cruzar un obstáculo que hace que su fondo toque el suelo. La otra recibe el nombre de falla de colisión de la defensa delantera y ocurre cuando el vehículo desciende por una zanja y la defensa delantera toca el suelo.

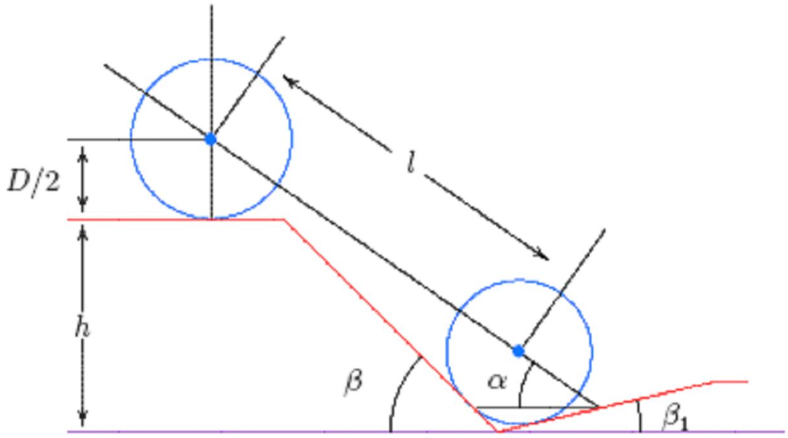


Figura 2: Gráfico del Problema 2.

La figura anexa (figura 2) muestra los componentes asociados al segundo tipo de falla. En ella se indica que el ángulo máximo en que no ocurre la falla por rozamiento satisface la ecuación,

$$A\,sen\,\alpha\cos\alpha + B sen^2\alpha - C\cos\alpha - E sen\alpha = 0$$

Donde:

$A = l sen\beta_1$, $B = l\cos\beta_1$, $C = (h + 0.5D) sen\beta_1 - 0.5D\tan\beta_1$, y

$E = (h + 0.5D)\cos\beta_1 - 0.5D$

a) Elabore una función de MATLAB que permita resolver una ecuación no lineal usando los métodos de Newton, Newton con diferencias finitas y Secante.

b) Se afirma que, cuando l = 89 inch, h = 49 inch, D = 55 inch y β_1 = 11.50, el ángulo será aproximadamente de 330. Verifique este resultado.

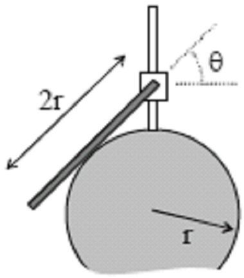
c) Encuentre α para la situación en que l, h y β_1 son iguales como en el inciso anterior, pero D =(30 +α/10) inch.

Ejm código: 20010047J ➔ $\alpha = 7$

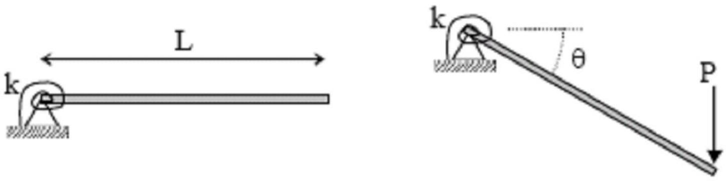
Si el grupo esta conformado por dos alumnos escoger un código de uno de los integrantes.

Problema 6

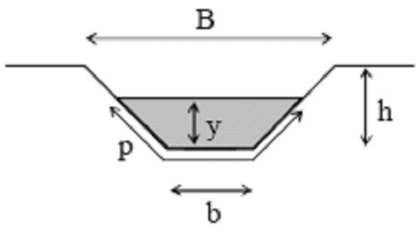
1. Definir en MATLAB las funciones referentes a los siguientes problemas:
   a) Prob 4.60 del libro de Mecánica Vectorial para Ingenieros - Estática – 5ta Edición – Beer& Johnston
   Ecuación resultante: cos3 θ = sen θ
   Cero: Ángulo correspondiente al equilibrio



   b) Equilibrio no lineal de una viga
   Ecuación resultante: PLcosθ= kθ
   Cero: ángulo correspondiente al equilibrio
   Considere: P=2.5tf, L=3.5m y K=10 tf-m/rad



   c) Ecuación de Manning
   Ecuación resultante: $Q_{\max} = \dfrac{AR^{2/3}s^{1/2}}{n}$ donde A y R dependen de la cantidad de líquido en el ducto es $R=A/p$
   Cero: Cantidad de líquido (y) correspondiente al caudal máximo
   Considere: $Q_{\max}$=24 m^3/s, s=0.0009, n=0.012, h=1.9 m, b=2.5m y B=6.3m



   d) Un cable telefónico suspenso entre dos postes tiene un peso de α Kgr-f-m. Una tensión en medio del cable es obtenida por la resolución de la siguiente ecuación:

$$\frac{2T}{\alpha} senh\left(\frac{\alpha L}{2T}\right) = S$$

   Donde
   S es la longitud del cable
   L es la distancia entre los postes
   Se trata de hallar T a partir de las siguientes condiciones:

S=32m L=30m α=0.10 Kgf Tolerancia =1e-2

e) Una de las ecuaciones de estado mas utilizadas en termodinámica es la ecuación cúbica de " Van-Der-Walls" que relaciona el volumen, presión y temperatura de un cierto gas mediante la forma:

$$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=RT$$

Donde la presión p, T es la temperatura y v es el volumen molar (l/mol)
Considerando el gas carbónico (CO_2), determine el volumen molar para las condiciones de presión igual a 10 atm y temperatura igual a 300K.
Datos: R=0.082054 a=3.592 b=0.04267

2. implementar los algoritmos de bisección, Newton y la cuerda.
Utilizar los siguientes encabezados
Bisección: function [z,nite]=mne_bisecc(fun,a,tol,itmax)
Newton : function [z,nite]=mne_newton(fun,dfun,xo,tol,itmax)
Pto. fijo : function [z,nite]=pto_fijo(fun,xo,tol,itmax)
Donde z :es una tabla que guarda el histórico de las iteraciones
nite :número de iteraciones

Sugerencias

- Verificar, cuando es posible, la consistencia de los datos de entrada con los requisitos de convergencia de los métodos.
- Hacer la localización del cero antes de empezar el método, presente sus gráficos correspondientes indicando los ceros de la función.
- Probar si xo es un buen punto inicial (Caso de Newton Raphson)
- Pronosticar el número de iteraciones antes de ejecutar el método de Bisección
- Debe indicar el criterio de parada a utilizar, pruebe con todos los criterios y elija el mejor.
- Comentar su código ("**%**" permitirá desarrollar sus comentarios)
- Utilizar variables con nombres sugestivos
- Su implementación deberá siempre que sea posible pasar el cero de la función y el número de iteraciones empleadas, o en caso contrario un mensaje esclarecedor.
- Variables acumulativas en la estructura de repetición precisan ser iniciadas
- Cuando el problema analizado depende de un denominador, verificar la posibilidad si este es cero.

Escoger el penúltimo caracter del código del alumno y asignar una letra o problema según la tabla:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
a	b	c	d	e	A	b	c	d	e

Ejm código: 2001004**7**J → a este código le corresponde la aplicación b.
Si el grupo esta conformado por dos alumnos escoger el código del alumno más antiguo.

3. Aplicar a los tres algoritmos de la pregunta anterior para cada función definida en la parte 1). Estudiar la influencia de los valores de la tolerancia y del intervalo inicial (o punto inicial en el caso de Newton) en el número de iteraciones. Cada iteración corresponde a la ejecución de un bloque de comandos de la ecuación de recurrencia del método. Escribir las conclusiones de su estudio.

Problema 7

- Elabore el programa en Matlab que calcule todos los valores propios y sus vectores asociados usando el método de la potencia y todas sus variantes. Utilice como criterio de parada el error absoluto con la norma infinita.
- Cuando ingrese A, deberá probar si es una matriz simétrica y dar pase al algoritmo de la potencia, en caso contrario envié un mensaje de advertencia (‘Desea Continuar a pesar que A no es simétrica ➔ si / no’) , si es no debe salir de la rutina y si es afirmativa su respuesta, continuar.

  El programa debe considerar:
  - Un número máximo de iteraciones (50), si saliera por este límite, deberá enviar un mensaje de error como (‘no converge el método’).
  - reportar iteración a iteración los componentes del vector que tiende al vector dominante y del escalar que tiende al valor propio dominante.
  - Use como criterio de parada una tolerancia de 1e-5.
  - Utilice un valor q de desplazamiento adecuado que será leído desde el teclado para acelerar la convergencia del método de la potencia.
- Grafique como cambia el error en cada iteración hasta que converja.

Hacer una rutina para graficar el teorema de Gershgorin.

Utilice este programa para hallar todos los autovalores de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2.5\alpha & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha & -1 & -0.5 & 0 \\ -1 & -1 & 7\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 2.5\alpha & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 & -\alpha \end{bmatrix}$$

- Compare sus resultados usando las funciones de Matlab.

Escoger $\alpha \neq 0$ igual al último dígito del código del alumno.

Ejm código: 20010047J ➔ $\alpha = 7$, si ese código fuera cero sumarle 1.

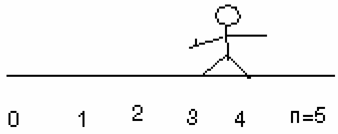
Si el grupo esta conformado por dos alumnos escoger un código de uno de los integrantes.

Problema 8

Sea el sistema:

$$x_k = \left(\tfrac{3}{4}\right)x_{k-1} + \left(\tfrac{1}{4}\right)x_{k+1} \qquad k = 1 \Lambda\ n-1$$
$$x_0 = 1 \quad x_n = 0$$

Que se puede interpretar como representar un caminante que se mueve al azar, hacia la izquierda con frecuencia triple que hacia la derecha, sobre una línea con posiciones numeradas de 0 a n. Parte de la posición 0 y cuando llega a la posición ***n*** se detiene. $\boldsymbol{x_k}$ representa la probabilidad de ubicarse en el punto k.



Implemente rutinas en MATLAB, para n según la tabla siguiente:

Ultimo digito del código del alumno mas antiguo del grupo	n
0, 1, 2	3, 7, 10
3, 4, 5	4, 8, 12
6, 7, 8, 9	5, 9, 15

a. Analice el condicionamiento para cada caso.
b. Revuélvase mediante el método de la inversa
c. Revuélvase mediante el operador “\”
d. Resuelva mediante Jacobi, Gauss-Seidel y Sobre-Relajación.
e. Compare las soluciones obtenidas y comente sus resultados.

Problema 9

Elabore un algoritmo que tiene como datos: n, la matriz A(n×n), donde A = (a_{ij}) es tal que $a_{ij} = 0$ para $|i - j| > 1$, y b es un vector (n × 1), determine la solución del sistema Ax = b por el método de Gauss-Seidel y Jacobi:

a) Pruebe su algoritmo para resolver el sistema dado por:

$$-y_{k-1} + 2y_k - y_{k+1} = \frac{8}{(n+1)^2}, \quad k = 1, 2, \Lambda\ , n$$

Para varios valores de n, compare su solución con la solución matemática:

$$y_k = 4\left[\frac{k}{n+1} - \left(\frac{k}{n+1}\right)^2\right]$$

Considere n, según la tabla y tome en ambos casos $y_0 = y_{n+1} = 0$.

Ultimo digito del código del alumno mas antiguo del grupo	n
0, 1, 2	3, 7, 10
3, 4, 5	4, 8, 12
6, 7, 8, 9	5, 9, 15

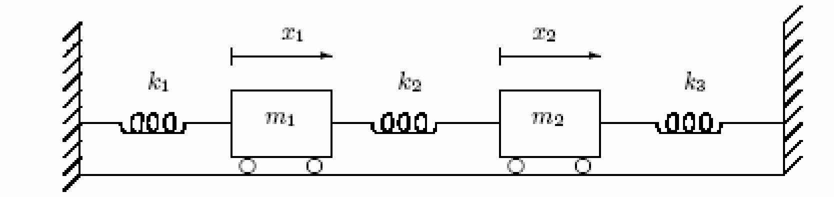
b) Pruebe el algoritmo para resolver el sistema Ax=b, donde:

$$A = \begin{pmatrix}
4 & -2 & & & & & & & & \\
-1 & 2 & -1 & & & & \bigcirc & & & \\
 & -1 & 2 & -1 & & & & & & \\
 & & -1 & 2 & -1 & & & & & \\
 & & & -1 & 2 & -1 & & & & \\
 & & & & -1 & 2 & -1 & & & \\
 & & & & & -1 & 2 & -1 & & \\
 & & & & & & -1 & 2 & -1 & \\
 & \bigcirc & & & & & & -1 & 2 & -1 \\
 & & & & & & & & -2 & 4
\end{pmatrix}$$

$$b = (2,\ -1,\ 7,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ -4,\ 7,\ 8)^t.$$

Problema 10

Considere el movimiento horizonal del conjunto masa-resorte mostrado a continuación:



Los desplazamientos horizontales x_1 y x_2 son medidos relativamente respecto a la posición de equilibrio estático. Los resortes poseen rigideces de k_1, k_2 y k_3.
Las ecuaciones de movimiento son:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1)$$
$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = k_2 (x_1 - x_2) + k_3 x_2$$

Si $x = (x_1, x_2)^T$ el vector de desplazamientos entonces podemos escribir la ecuación anterior en la forma:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = Ax$$

a) Demuestre que la sustitución:

$$x = ve^{i\omega t}$$

Donde v es un vector en R^2, $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\ \sin(\omega t)$ con $i = \sqrt{-1}$, conduce a un problema de auto-valores: $Av = \lambda v$ donde $\lambda = -\omega^2$: Los posibles valores que ω puede asumir son las frecuencias naturales de vibración del sistema.

b) Localice todos los valores propios y luego calcule todos los valores y vectores característicos en forma analítica, usando los siguientes datos:

Ultimo digito del código del alumno mas antiguo del grupo	Datos
0, 1, 2	$k_1 = k_2 = k_3 = 1\ kg/s^2$ y $m_1 = m_2 = 1\ kg$
3, 4, 5	$k_1 = k_2 = 2\ kg/s^2 \quad k_3 = 1\ kg/s^2$ y $m_1 = m_2 = 1\ kg$
6, 7, 8, 9	$k_1 = k_2 = 3\ kg/s^2 \quad k_3 = 2\ kg/s^2$ y $m_1 = m_2 = 2\ kg$

c) Resolver mediante el método de la potencia directa, inversa e inversa con desplazamiento eligiendo tolerancias y valores iniciales adecuados.
d) Diagonalizar la matriz usando alguna de las normas.

Problema 11

Lee y Duffy relacionaron el factor de fricción para flujo de particular fibrosas en suspensión con el numero de Reynolds, con la siguiente ecuación empírica:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \left(\frac{1}{k}\right) Ln\left(\mathrm{Re}\sqrt{f}\right) + \left(14 - \frac{5.6}{k}\right)$$

En esta relación f es el factor de fricción, Re es el número de Reynolds y k es una constante determinada por la concentración de partículas en suspensión.
Resolver según la siguiente tabla:

Ultimo digito del código del alumno mas antiguo	k	f
0, 1, 2	0.25	3000
3, 4, 5	0.50	4500
6, 7, 8, 9	0.75	2300

a) Localice la raíz o raíces de la ecuación
b) Resuélvase por bisección, con una precisión de 8 dígitos exactos.
c) Resuélvase por Newton-Raphson, con una precisión de 10 dígitos exactos.
d) Trate de encontrar un iteración de punto fijo adecuada.
e) Compare sus resultados

Los profesores
Lima, 12 de Mayo del 2006