UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA

Área Académica de Ciencias Básicas Humanidades y Cursos Complementarios

METODOS NUMERICOS (MB –536)

CALCULO DE VALORES Y VECTORES PROPIOS

Profesores:

Garrido Juárez Rosa

Castro Salguero Robert

Obregón Ramos Máximo

2009-1

VALORES Y VECTORES PROPIOS

El cálculo de los valores propios y de los vectores propios de una matriz tiene gran importancia en las matemáticas y en la ingeniería, algunos de estos campos de aplicación son:

- Sistemas Mecánicos vibratorios y resonancias- Valores propios ω^2(frecuencia de resonancia) y los vectores propios dados por los modos naturales de vibración.
- Circuitos eléctricos-circuitos resonantes
- Cálculos de Esfuerzos y Deformaciones.
- Transformaciones Geométricas usando Matrices.(Ejes de Rotación)
- Estabilidad de los sistemas lineales.(p.e. Ingeniería de Control)

Definición 1

Sea ***A*** una matriz cuadrada de orden n con componentes en K (R ó C). Un escalar λ se dice que es un valor propio de ***A*** si existe un vector $\mathbf{u} \in K^n, \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ tal que

$$A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}. \qquad (1)$$

En estas condiciones decimos que **u** es vector propio de ***A*** asociado al valor propio λ.

El problema de los valores propios de una matriz cuadrada *A*, consiste en determinar los escalares λ que proporcionan soluciones diferentes de la trivial al sistema lineal (1). Es decir, soluciones tales que $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.

Nótese que si **u** satisface la ecuación (1), también un múltiplo arbitrario de **u** (cualquier vector paralelo **u**) es una solución.

Ejemplo 1. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Dado que: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

tenemos que:

λ_1=3 es el valor propio de ***A***, y

$\mathbf{u}_1 = [1 \quad 1]^t$ es vector propio de ***A*** asociado al valor propio λ_1=3

Además, puesto que $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

tenemos que:

λ_2=-1 es el valor propio de ***A***, y

$\mathbf{u}_2 = [1 \quad -1]^t$ es vector propio de ***A*** asociado al valor propio λ_2=-1

Teorema 1
Sea ***A*** una matriz cuadrada. Entonces λ es valor propio de ***A*** si y solo si det(A-λI) = 0

Demostración:

$$\begin{aligned}
&\lambda \text{ valor propio de A} \Leftrightarrow \text{u} \neq 0, \quad \text{Au} = \lambda\text{u} \\
&\Leftrightarrow \text{u} \neq 0 \text{ y } (\text{A} - \lambda\text{I})\text{u} = 0 \\
&\Leftrightarrow (\text{A} - \lambda\text{I})\text{u} = 0 \text{ es un sistema compatible indeterminado} \\
&\Leftrightarrow \det(\text{A} - \lambda\text{I}) = 0
\end{aligned}$$

Definición 2

Sea ***A*** una matriz cuadrada.

i) $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ se llama **polinomio característico** de A

ii) $p(\lambda) = 0$ se llama **ecuación característica** de A

iii) Llamaremos multiplicidad algebraica de un valor propio λ, representada por $m_a(\lambda)$, a la multiplicidad de λ como raíz de $p(\lambda) = 0$.

Teorema 2
Sea ***A*** una matriz cuadrada de orden n con componentes en K y λ un valor propio de ***A***. El conjunto

$$E(\lambda) = \{\text{u} \in \mathrm{R}^n : (A - \lambda I)\text{u} = 0\}$$

es un subespacio vectorial de R^n

Demostración**.** Ejercicio

Definición 3

Sea $A \in M_{n\times n}(K)$ y λ un valor propio de ***A***. El subespacio vectorial E(λ) es llamado **espacio propio de A asociado al valor propio** λ.

Nota
El conjunto de todos los vectores propios de una matriz A asociados al valor propio λ es dado por E(λ) – {**0**}

<u>**Calculo de los Valores y Vectores Propios**</u>

Vamos a sistematizar el procedimiento a seguir en el cálculo de los valores y vectores propios de una matriz ***A*** cuadrada

1. Calcular el polinomio característico de ***A*** . i.e $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$
2. Resolver la ecuación $p(\lambda) = 0$ para obtener las raíces de la ecuación característica (estas raíces son los valores propios de ***A***)
3. Cuando calculamos los vectores propios de una matriz dada, asociados a cierto valor propio λ, tenemos que resolver el sistema homogéneo (A-λI)**u** = **0** que tiene que ser indeterminado. Como tal debe de existir una fila nula en la matriz A-λI., si tal no ocurriera algún error fue cometido.

Definición 4
La dimensión del subespacio propio es llamada la ***multiplicidad geométrica*** (m.g.) del valor propio y algunas veces *Nulidad* de (A-λI).

Teorema 3
Sea ***A*** una matriz cuadrada de orden n y λ un valor propio de ***A***. Entonces, la multiplicidad geométrica de λ es menor o igual a la multiplicidad algebraica de λ.

Este resultado nos permite concluir inmediatamente que si un valor propio tiene multiplicidad algebraica 1, entonces su multiplicidad geométrica es también 1.

Ejemplo 2
Para la matriz A del ejemplo 1, tenemos:

$$\begin{aligned} |A-\lambda I| &= \left| \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda^2) - 4 = (1-\lambda-2)(1-\lambda+2) \\ &= (3-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, los valores propios de *A* son:
•$\lambda_1 = 3$ con multiplicidad algebraica $m_a = 1$ y
•$\lambda_2 = -1$ con multiplicidad algebraica $m_a = 1$
Para $\lambda_1 = 3$, tenemos que resolver

$$\begin{bmatrix} 1-3 & 2 \\ 2 & 1-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tomamos como variable libre a x_2 y como variable básica a x_1

$$Ker(A-3I) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

La multiplicidad geométrica de $\lambda_1 = 3$ es m.g.=dim($Ker(A - 3I)$)=1
El vector $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^t$ es un vector propio de A con valor propio $\lambda = 3$
Para $\lambda_1 = -1$, tenemos que resolver

$$\begin{bmatrix} 1-(-1) & 2 \\ 2 & 1-(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tomamos como variable libre a x_2 y como variable básica a x_1

$$Ker(A+I) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

La multiplicidad geométrica de $\lambda_2 = -1$ es m.g.=dim($Ker(A+I)$)=1
El vector $\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^t$ es un vector propio de A con valor propio $\lambda = -1$

Ejemplo 3
Encuentre los valores y espacios propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución
Encontremos el polinomio característico de la matriz *A*.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 2 \\ 4 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (5-\lambda)[(5-\lambda)(2-\lambda)-4] - 4[4(2-\lambda)-4] + 2[8-2(5-\lambda)]$$

$$= (5-\lambda)(10-7\lambda+\lambda^2-4) - 4(8-4\lambda-4) + 2(8-10+2\lambda)$$
$$= (5-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-6) + 16(\lambda-1) + 4(\lambda-1)$$
$$= (\lambda-1)[(5-\lambda)(\lambda-6)+20]$$
$$= (\lambda-1)(-\lambda^2+11\lambda-10)$$
$$= -(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-10)$$
$$= -(\lambda-1)^2(\lambda-10).$$

Luego los valores propios son: $\lambda = 1$ con m_a= 2 (la raíz se repite 2 veces) y $\lambda = 10$ con m_a=1.
Encontremos los vectores propios asociados con estos valores propios. Nuevamente resolvemos el sistema homogéneo $(A - \lambda I)\, x = 0$, para $\lambda = 1$ y $\lambda = 10$.
Para $\lambda = 10$ tenemos:

$$(A - 10I)x_1 = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -8 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\text{Aplicando} \\ \text{operaciones} \\ \text{fila}}} \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -\frac{9}{5} & \frac{18}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Las soluciones del sistema son: $x_1 = 2x_3$ y $x_2 = 2x_3$. Los vectores propios asociados con $\lambda = 10$ son de la forma

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El sub-espacio característico o propio para $\lambda = 10$ es:

$$E_{10} = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} : x_3 \in IR \right\} = gen\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \text{ (m.g.=1)}$$

Resolvamos ahora el sistema para $\lambda = 1$, es decir,

$$(A - 1I)x = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 4 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Aplicando operaciones fila}} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Las soluciones al sistema homogéneo están dadas por el vector

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -2x_1 - 2x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

donde x_1 y x_2 son parámetros reales.

El subespacio propio asociado al valor $\lambda = 1$ es:

$$E_1 = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} : x_1 \in IR,\ x_2 \in IR \right\} = gen\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Observe $\dim E_1 = 2$=m.g.(multiplicidad geométrica) es igual a la multiplicidad algebraica de la ecuación característica, este hecho es importante en la diagonalización de matrices como lo veremos más adelante.

Propiedades de Valores y Vectores Propios

Proposición 1

Sea $A \in M_{n\times n}(K)$ entonces

a) El producto de los valores propios de ***A*** es igual al determinante de ***A***.
b) La suma de los valores propios de ***A*** es igual a la traza de ***A***

Demostración:

a) Sea $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_n$ los valores propios de ***A***, luego

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + c_1\lambda + c_0 = (-1)^n (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)\ldots(x - \lambda_n)$$

Igualando términos

$$c_0 = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \ldots. \times \lambda_n \Rightarrow p(0) = \det(A) = c_0 = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \ldots. \times \lambda_n \qquad \blacksquare$$

b) Ejercicio

Proposición 2

Sea $A \in M_{n\times n}(K)$ entonces

a) Si λ es valor propio de $\boldsymbol{A}$ (invertible) entonces λ^{-1} es valor propio de $\boldsymbol{A}^{-1}$

b) Si λ es valor propio de $\boldsymbol{A}$ entonces $\alpha\lambda$ es valor propio de $\alpha\boldsymbol{A}$, $\alpha \in R\setminus\{0\}$

Teorema 4

Vectores propios asociados a valores propios distintos son linealmente independientes.

Demostración

Sea A una matriz cuadrada de orden n y $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ vectores propios de A asociados respectivamente a los valores propios λ_1 y λ_2. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, queremos probar que el conjunto $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$es linealmente independiente.

Sean $\alpha_1, \alpha_2 \in R /\quad \alpha_1 \mathrm{u}_1 + \alpha_2 \mathrm{u}_2 = 0 \qquad (1) \Rightarrow A(\alpha_1 \mathrm{u}_1 + \alpha_2 \mathrm{u}_2) = 0$

i.e $\;A(\alpha_1 \mathrm{u}_1) + A(\alpha_2 \mathrm{u}_2) = 0 \Rightarrow \alpha_1 (A\mathrm{u}_1) + \alpha_2 (A\mathrm{u}_2) = 0$

como $A\mathrm{u}_1 = \lambda_1 \mathrm{u}_1; A\mathrm{u}_2 = \lambda_2 \mathrm{u}_2 \Rightarrow \alpha_1\lambda_1 \mathrm{u}_1 + \alpha_2\lambda_2 \mathrm{u}_2 = 0 \qquad (2)$

multiplicando $(1)\times\lambda_2$: $\quad \lambda_2\alpha_1 \mathrm{u}_1 + \lambda_2\alpha_2 \mathrm{u}_2 = 0 \qquad (3)$

$(3)-(2): \qquad \lambda_2\alpha_1 \mathrm{u}_1 - \lambda_2\alpha_1 \mathrm{u}_1 = 0 \Rightarrow (\lambda_2 - \lambda_1)\alpha_1 \mathrm{u}_1 = 0; \quad \lambda_2 \neq \lambda_1 \wedge \alpha_1 \mathrm{u}_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$

sustituyendo en (1) $\alpha_2 = 0$

Así probamos que si $\alpha_1 \mathrm{u}_1 + \alpha_2 \mathrm{u}_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ Aplicando inducción tenemos el resultado final. ■

Diagonalizacion de una matriz

Definición 5

Dos matrices A y B, de orden n, se dicen son semejantes si existe una matriz P, de orden n, invertible tal que B = $P^{-1}AP$

Teorema 5

Sean A y B dos matrices semejantes de orden n entonces:

(i) A y B tienen el mismo determinante
(ii) A y B tienen el mismo polinomio característico
(iii) A y B tienen los mismos valores propios
(iv) Si **u** es un vector propio de A asociado al valor propio λ entonces $P^{-1}\mathbf{u}$ es vector propio de B asociado al valor propio λ.

Demostración:

(i) Como B = $P^{-1}AP$ tenemos $|B| = |P^{-1}AP| = |P^{-1}||A||P| = \dfrac{1}{|P|}|A||P| = |A|$

(ii) $|B - \lambda I| = |P^{-1}AP - \lambda I| = |P^{-1}AP - \lambda P^{-1} I P| = |P^{-1}(A - \lambda I)P| = |P^{-1}||(A - \lambda I)||P| = |A - \lambda I|$

(iii) Consecuencia de (ii)

(iv) Si **u** es un vector propio de A asociado al valor propio λ entonces

$$A\mathrm{u} = \lambda \mathrm{u} \Rightarrow P^{-1}APP^{-1}\mathrm{u} = P^{-1}\lambda \mathrm{u} \Rightarrow (P^{-1}AP)(P^{-1}\mathrm{u}) = \lambda(P^{-1}\mathrm{u})$$

$$\Rightarrow B(P^{-1}\mathrm{u}) = \lambda(P^{-1}\mathrm{u})$$

O sea $P^{-1}u$ es vector propio de A asociado al valor propio λ

Definición 6

Una matriz ***A*** de orden n se dice que es **diagonizable** si es semejante a una matriz diagonal D, es decir diremos que una matriz A es **diagonalizable** si existe una matriz P no singular que verifique que $P^{-1}AP=D$.

Observaciones

- Todas la matrices simétricas son diagonalizables
- Los valores propios de A son los elementos de la diagonal de la matriz D
- Si la multiplicidad geométrica es menor que la multiplicidad aritmética entonces es posible encontrar los demás vectores asociados a λ_i usando la definición de vectores propios generalizados.
- Si P está formado por vectores propios generalizados al multiplicar $P^{-1}AP$ encontramos una matriz diagonal por bloques conocida como matriz de Jordan.

Definición 7

Vectores Propios Generalizados – son aquellos vectores que se encuentran mediante la siguiente ecuación:

$(A-\lambda I)x^k = x^{(k-1)}$, con $x^{(k-1)}$ *conocido*

Teorema 6

Una matriz ***A*** es diagonalizable si y solo si admite n vectores propios que constituye un conjunto linealmente independiente

Demostración

(➔)

Sea P una matriz invertible tal que $P^{-1}AP$ es diagonal. Sea

$$P = [C_1 \;\; C_2 \;\; \ldots \;\; C_n]$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$AP = P\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

$$A[C_1 \;\; C_2 \;\; \ldots \;\; C_n] = [C_1 \;\; C_2 \;\; \ldots \;\; C_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

i.e para cada i=1,2,…,n

$AC_i = \lambda_i C_i$

i.e C_i es vector propio de ***A*** asociado a λ_i. Por otro lado como P es invertible, tenemos el conjunto $\{C_1, C_2, \ldots C_n\}$ linealmente independiente.

(🡐)

Recíprocamente, sean $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ un conjunto linealmente independiente de vectores propios de la matriz A, asociados a los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ entonces, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ tenemos que $Ax_i = \lambda_i x_i$

Sea $P = [x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n]$. Entonces: $AP = [\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots, \lambda_i x_i, \ldots, \lambda_n x_n]$

Sea

$P^{-1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_j \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ la matriz inversa de P. entonces $[y_j][x_i] = \begin{cases} 0 & se\ i \neq j \\ 1 & se\ i = j \end{cases}$

Luego:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_j \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} [\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots, \lambda_i x_i, \ldots, \lambda_n x_n] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

■

Corolario 1

Si ***A*** es una matriz cuadrada de orden n. Si ***A*** tiene n valores propios distintos entonces A es diagonalizable.

Demostración

Inmediata.

Corolario 2

Una matriz A es diagonizable si la multiplicidad algebraica es igual a la multiplicidad geométrica para cada valor propio

Ejemplo 4:

Sea la matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ tiene 3 valores propios distintos, se nota que:

$\det(B - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (-1-\lambda)(1-\lambda)(7-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1, \lambda = 1, \lambda = 7$

Entonces la matriz es diagonalizable, pues es semejante a la matriz

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 5:

Sea $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, teniendo que

$\det(C - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (3-\lambda)^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3$ (multiplicidad algebraica m_a =3)

Verificamos que la matriz C tiene un único valor propio 3. En este caso los vectores propios. Asociados a λ=3, son vectores no nulos dados por $t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $t \in R$, la multiplicidad geométrica del valor propio 3 es 1. ($m_a \neq m_g$) Entonces, C **no es diagonizable**.

Ejemplo 6:

Sea la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, tiene dos valores propios distintos, 0 (de multiplicidad algebraica 2) y 5 (multiplicidad algebraica 1)

Como

$$A - 0I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Tenemos que la multiplicidad geométrica del valor propio 0 es 2, por lo que $m_a = m_g$

Por otro lado verificamos que los vectores propios de $\boldsymbol{A}$, asociados al valor propio λ_1=0, son los vectores no nulos de la forma $\alpha\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\alpha, \beta \in R$

Los vectores propios asociados al valor propio λ_2=5, son vectores no nulos de la forma $\gamma\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\gamma \in R$. Entonces, $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, es una matriz diagonalizante de A. En efecto $P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Proposición 3:

Para una matriz A simétrica, sus vectores propios asociados a valores propios diferentes son ortogonales.

Demostración:

Sean X_1, X_2 vectores propios de $\boldsymbol{A}$ asociados a λ_1, λ_2 respectivamente. Se sabe que $AX_1 = \lambda_1 X_1$ y $AX_2 = \lambda_2 X_2$. Ahora si escribimos los vectores como matrices columnas, o productos escalares o simplemente producto matricial de la transpuesta de la matriz por la segunda, como

$$AX_1 \bullet X_2 = (AX_1)^t X_2 = X_1{}^t.A^t.X_2 = X_1 \bullet .A.X_2$$

Como A es simétrica $A^t = A$ y como X_1, X_2 son vectores propios de $\boldsymbol{A}$, tenemos que:

$\lambda_1 X_1 \cdot X_2 = \lambda_2 X_1 \cdot X_2$ ó $(\lambda_1 - \lambda_2) X_1 \cdot X_2 = 0$

Como, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ concluimos que $X_1 \cdot X_2 = 0$ ó sea que X_1, X_2 son ortogonales.

Definición 8

Se dice que un conjunto de vectores $\{\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, .., \boldsymbol{x_n}\}$ son ortonormales si:

$$\boldsymbol{x_i x_j} = \begin{cases} \boldsymbol{0} & (\boldsymbol{i \neq j}) \\ \boldsymbol{1} & (\boldsymbol{i = j}) \end{cases}$$

<u>Métodos de Solución Iterativos</u>

Localización de los Valores Propios

Teorema 7

Si λ es un valor propio cualquiera de **A**, entonces**:** $|\lambda| \leq \|A\|$

Teorema 8 (Teorema de Gershgorin)

Sea **A** una matriz cuadrada de orden n , y d_i, $i = 1,2,\ldots,n$ los discos cuyos centros son los elementos a_{ii} y cuyos radios r_i son dados por

$$r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

Sea D la unión de todos los discos d_i. Entonces, todos los valores propios de $\boldsymbol{A}$ se encuentran contenidos en D.

Demostración

Sea λ un valor propio de A y x su vector correspondiente, tal que $\max_i |x_i| = 1$.

Entonces

$Ax = \lambda x$

De donde

$$(\lambda - a_{ii})x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij}x_j, \quad i = 1,2,\ldots n$$

Suponiendo que $|x_k|=1$, entonces

$$\begin{aligned} |\lambda - a_{kk}| &\leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{kj}||x_j| \\ &\leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{kj}| = r_k \end{aligned}$$

i.e los valores propios están contenidas en disco d_k y, como λ es arbitrario, entonces todos los valores propios de A deben de estar contenidos en la unión de todos los discos.

■

Ejemplo 7

La matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ tiene como sus valores propios $\lambda_1 = 0.4158; \lambda_2 = 2.2943; \lambda_3 = 6.2899$. Calculando los discos de Gershgorin, tenemos

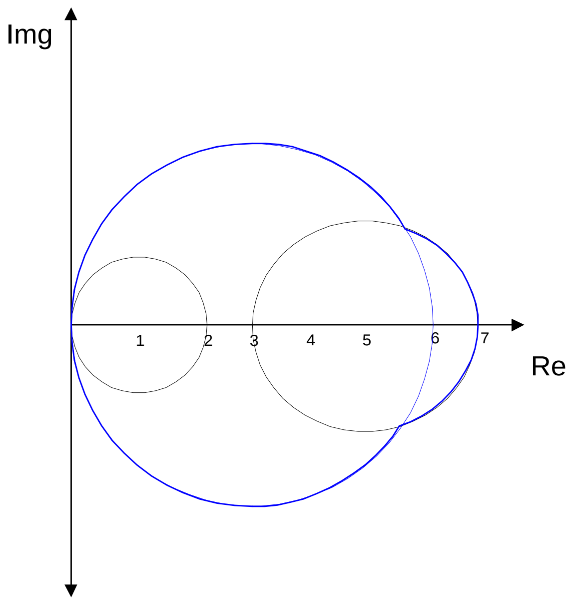
$d_1 : |\lambda - 5| \leq |-2| + |0| = 2$

$d_2 : |\lambda - 3| \leq |-2| + |-1| = 3$

$d_3 : \quad |\lambda - 1| \leq |0| + |-1| = 1$

Como todos los valores propios de A son reales, y observando la figura que en cada disco debemos tener un valor propio, podemos decir que:

- Existe un valor propio, λ_3, que está dentro del disco centrado en 5 y radio 2, en efecto: $3 < \lambda_3 = 6.2899 < 7$
- Existe un valor propio, λ_2, que está dentro del disco centrado en 3 y radio 3, en efecto: $0 < \lambda_2 = 2.2943 < 6$
- Existe un valor propio, λ_1, que está dentro del disco centrado en 1 y radio 1, en efecto: $0 < \lambda_1 = 0.4148 < 2$



Método de la Potencia

Para aplicar el método de la potencia debemos suponer que:

a) la matriz A de orden n, tiene n valores característicos $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$ con una colección asociada de vectores característicos { $v^{(1)}, v^{(2)}, ...\, v^{(n)}$ }los cuales son **linealmente independientes**.

b) Además supondremos que A tiene precisamente un valor característico que es el mayor en magnitud y que, por esta razón, supondremos que $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$ denotan a los valores característicos de A con:

$$|\boldsymbol{\lambda_1}| > |\lambda_2| \geq .... \geq .|\boldsymbol{\lambda_n}| \geq \mathbf{0}\,.$$

Si $\boldsymbol{x}$ es cualquier vector en, $\Re^{n}$, el hecho de que { $\boldsymbol{v}^{(1)}\, \boldsymbol{v}^{(2)} \dots \boldsymbol{v}^{(n)}$ } sean linealmente independientes implica que existen constantes $\alpha_1\, \alpha_2 ... \alpha_n$ con

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\ v^{(j)} \qquad (2)$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación (2) por, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A^2}$,......, $\boldsymbol{A^k}$, obtenemos:

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j A v^{(j)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j v^{(j)}$$

$$A^2 x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j A^2\, v^{(j)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j{}^2 v^{(j)} \qquad (3)$$

....

....

$$A^k x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j A^k\, v^{(j)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j{}^k v^{(j)}$$

factorizando $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{1}}^{\boldsymbol{k}}$ en última ecuación de (3)

$$A^k x = \lambda_1^k \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right) v^{(j)}$$

Si $|\lambda_1| > |\lambda_j|$,para j=2,3..,n, implica que $\lim_{k->\infty} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right)^k = 0$

$$\lim_{k->\infty} A^k x = \lim_{k->\infty} \lambda_1^k \alpha_1 v^{(1)} \qquad (4)$$

Esta sucesión convergerá a cero si $|\lambda_1| > |\lambda_j|$ y divergirá si $|\lambda_1| < |\lambda_j|$, siempre y cuando, $\boldsymbol{\alpha_1} \neq \mathbf{0}$. Se puede tomar ventaja de la ecuación (4) si se escala las potencias $\boldsymbol{A^k\, x}$ de una manera apropiada, para asegurar que el límite en (4) sea finito y no cero. El escalamiento comienza escogiendo a $\boldsymbol{x}$ como un vector unitario $\boldsymbol{x}^{(0)}$ relativo a la norma infinita($\|\ .\|_{\infty}$).

Algoritmo de la Potencia

Para aproximar el valor característico dominante y su vector característico asociado de la matriz A de orden n, dado un vector inicial no nulo $\boldsymbol{x}$

Entrada: dimensión n, Matriz A, vector x; tolerancia TOL, número máximo de iteraciones MAX

Salida : valor característico aproximado; vector característico aproximado $\boldsymbol{x}$ (con $\|\boldsymbol{x}\|_{\infty}$ =1) ó un mensaje de que el número de iteraciones fue excedido.

Paso 1: k=1

Paso 2: Encontrar un entero p con $\mathbf{1} \le \boldsymbol{p} \le \boldsymbol{n}$ y $|\boldsymbol{x}_p| = \|\boldsymbol{x}\|_{\infty}$

Paso 3: Tomar $\boldsymbol{x} = \dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}_p}$

Paso 4: Mientras que (k≤MAX) seguir los pasos 5 -10

Paso 5: Tomar $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$

Paso 6: Tomar $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{y}_p$

Paso 7: Encontrar un entero p con $\mathbf{1} \le \boldsymbol{p} \le \boldsymbol{n}$ $|\boldsymbol{y}_p| = \|\boldsymbol{y}\|_{\infty}$

Paso 8: Si yp=0 entonces SALIDA Mensaje de Fracaso. Parar.

Paso 9: Tomar $\boldsymbol{err} = \left\| \boldsymbol{x} - \dfrac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}_p} \right\|_{\infty}$

$\boldsymbol{x} = \dfrac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}_p}$

Paso 9 : Si $err < TOl$ entonces salida (μ, x)

Salir.

Paso 10: hacer k=k+1

Paso 11 Salida (´Número máximo de iteraciones fue excedido’)

Parar.

Ejemplo 8

Usando el método de la potencia, hállese una aproximación del mayor valor característico y del vector característico correspondiente al siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Dar el valor más aproximado para el valor propio máximo en la cuarta iteración.

Solución:

El primer paso, elegimos el vector inicial para el desarrollo del método.

Sea el vector inicial $x^{(o)} = [\ 0 \quad 0 \quad 2]^t$

Luego se debe encontrar un entero p con $\mathbf{1 \leq \boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{n}}$ y $\left|\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{p}}\right| = \left\|\boldsymbol{y}\right\|_{\infty}$, donde n es la dimensión de la matriz. $\left\|x\right\|_{\infty} = \max\{|0|, |0|, |2|\} = 2$

Entonces p=3 y $x_3 = 2$

Enseguida, se debe normalizar el vector inicial x= $\dfrac{x}{x_p}$

El vector inicial normalizado será:

$$x^{(0)} = \frac{x}{x_3} = \frac{[0 \quad 0 \quad 2]^t}{2} = [0 \quad 0 \quad 1]^t$$

Ahora, encontraremos el primer valor propio $\mu^{(1)}$ y su respectivo vector propio normalizado $x^{(1)}$

$A\boldsymbol{x}^{(0)} = \mu^{(1)}\, \boldsymbol{x}^{(1)}$

En general, los siguientes valores serán encontrados como:

$A\boldsymbol{x}^{(k)} = \mu^{(k+1)}\, \boldsymbol{x}^{(k+1)}$, $k \geq 1$

Del ejemplo

Primera Iteración

$$\boldsymbol{Ax}^{(0)} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \mu^{(1)}\mathbf{x}^{(1)} = 5 \begin{bmatrix} 0 \\ -1/5 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\Rightarrow x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/5 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad \mu^{(1)} = 5$$

Segunda Iteración

$$\mathbf{Ax}^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1/5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 \\ -6/5 \\ 26/5 \end{bmatrix} = \mu^{(2)}\mathbf{x}^{(2)} = 26/5 \begin{bmatrix} 1/26 \\ -3/13 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\Rightarrow x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1/26 \\ -3/13 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mu^{(2)} = 5.2$$

Tercera Iteración

$$\mathbf{Ax}^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/26 \\ -3/13 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/26 \\ -33/26 \\ 68/13 \end{bmatrix} = \mu^{(3)}\mathbf{x}^{(3)} = 68/13 \begin{bmatrix} 9/136 \\ -33/136 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\Rightarrow x^{(3)} = \begin{bmatrix} 1/136 \\ -33/13 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mu^{(3)} = 68/13 = 5.3$$

Cuarta Iteración

$$\mathbf{Ax^{(3)}} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9/136 \\ -33/136 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15/34 \\ -89/68 \\ 713/136 \end{bmatrix} = \mu^{(4)}\mathbf{x^{(4)}} = 713/136 \begin{bmatrix} 60/713 \\ -178/713 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\Rightarrow x^{(3)} = \begin{bmatrix} 60/713 \\ -178/713 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mu^{(4)} = 713/136 = 5.2426$$

Valor exacto: 5.2618

Método de la potencia Inversa Iterada (con desplazamiento)

Usa el método de la potencia pero su convergencia es más rápida. Este método se usa para determinar el valor característico de A que está más cerca de un número especificado q.

Supongamos que la matriz A tiene valores característicos $\lambda_1\ \lambda_2 \ldots\ldots\lambda_n$ con vectores característicos { $v^{(1)}\ v^{(2)} \ldots v^{(n)}$ } linealmente independientes. Si consideramos la matriz $(A-qI)^{-1}$ donde $q \neq \lambda_i$ para i=1,2,..,n. Los valores característicos de $(A-qI)^{-1}$ son

$$\frac{1}{\lambda_1 - q}, \frac{1}{\lambda_2 - q} \ldots\ldots\ldots \frac{1}{\lambda_{n1} - q}$$

con vectores característicos $\boldsymbol{v}^{(1)}\ \boldsymbol{v}^{(2)} \ldots \boldsymbol{v}^{(n)}$.

Aplicando el método de la potencia:

$$\boldsymbol{y}^{(m)} = (\boldsymbol{A} - q\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{x}^{(m-1)} \quad \text{ó}$$

$$(\boldsymbol{A} - q\boldsymbol{I})\boldsymbol{y}^{(m)} = \boldsymbol{x}^{(m-1)} \qquad (5)$$

La ec. (5) puede resolverse usando Eliminación Gaussiana para obtener $\boldsymbol{y}^{(m)}$

El valor de q se puede estimar como:

$$\boldsymbol{q} = \frac{\boldsymbol{x}^{(0)t}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(0)}}{\boldsymbol{x}^{(0)t}\boldsymbol{x}^{(0)}}$$

Demostrar el algoritmo para este caso.

Ejemplo 9

Determine el valor propio más cercano a q=3, y su vector propio correspondiente, para la matriz: $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$, a partir de la aproximación inicial $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Solución

$q = 3$

$$B = (A - qI)^{-1} = \begin{bmatrix} 2.5 & -1 & -0.5 \\ -1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = Bx_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mu_1 = y_1(1) = 1 \quad x_1 = \frac{y_1}{\mu_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = \frac{1}{\mu_1} + q = 4$$

$$y_2 = Bx_1 = \begin{bmatrix} 3.5 \\ -1 \\ -0.5 \end{bmatrix} \quad \mu_2 = y_2(2) = 3.5 \quad x_2 = \frac{y_2}{\mu_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.2857 \\ -0.1429 \end{bmatrix} \quad \lambda_2 = \frac{1}{\mu_2} + q = 3.2857$$

$$y_3 = \begin{bmatrix} 2.8571 \\ -1 \\ -0.5714 \end{bmatrix} \quad \mu_3 = 2.8571 \quad x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.35 \\ -0.2 \end{bmatrix} \quad \lambda_3 = 3.35$$

$$y_4 = \begin{bmatrix} 2.95 \\ -1 \\ -0.6 \end{bmatrix} \quad \mu_4 = 2.95 \quad x_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.339 \\ -0.2034 \end{bmatrix} \quad \lambda_4 = 3.3390$$

$$y_5 = \begin{bmatrix} 2.9407 \\ -1 \\ -0.6017 \end{bmatrix} \quad \mu_5 = 2.9407 \quad x_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.3401 \\ -0.2046 \end{bmatrix} \quad \lambda_5 = 3.3401$$

Que son aproximaciones del valor propio $\lambda = 3.3390$ y el vector propio

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.3399 \\ -0.2047 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz tiene tres valores propios 0.3983, 3.3399 y 5.2618, y se nota claramente la convergencia al más cercano a *q*=3.

Método de la potencia Inversa

Si estamos buscando el **mínimo valor propio** el problema de valores característico se plantea

$$\boldsymbol{A^{-1}v = \lambda^{-1}v}$$

Aplicando el método de la potencia:

$$y^{(m)} = A^{-1}x^{(m-1)} \quad \text{ó}$$
$$Ay^{(m)} = x^{(m-1)} \qquad (6)$$

La ecuación (6) puede solucionarse por el método de Eliminación Gaussiana para encontrar $\boldsymbol{y}^{(m)}$

Ejemplo 10
Determine el valor propio de menor valor absoluto y su correspondiente vector propio, de la siguiente matriz, utilice el método de la potencia inversa.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución

$$B = A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.50 & 0.25 \\ 0.50 & 1.00 & 0.50 \\ 0.25 & 0.50 & 0.75 \end{bmatrix}$$

$$w_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$z_1 = Bw_0 = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} \qquad p = 2, \quad z_1(p) = 2 \qquad w_1 = \frac{z_1}{z_1(p)} = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 1 \\ 0.75 \end{bmatrix} \qquad \frac{1}{z_1(p)} = 0.5$$

$$z_2 = Bw_1 = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 1.75 \\ 1.25 \end{bmatrix} \qquad p = 2, \quad z_2(p) = 1.75 \qquad w_2 = \frac{z_2}{z_2(p)} = \begin{bmatrix} 0.7143 \\ 1 \\ 0.7143 \end{bmatrix} \qquad \frac{1}{z_2(p)} = 0.5714$$

$$z_3 = Bw_2 = \begin{bmatrix} 1.2143 \\ 1.7143 \\ 1.2143 \end{bmatrix} \qquad p = 2, \quad z_3(p) = 1.7143 \qquad w_3 = \frac{z_3}{z_3(p)} = \begin{bmatrix} 0.7083 \\ 1 \\ 0.7083 \end{bmatrix} \qquad \frac{1}{z_3(p)} = 0.5833$$

$$z_4 = Bw_3 = \begin{bmatrix} 1.2083 \\ 1.7083 \\ 1.2083 \end{bmatrix} \qquad p = 2, \quad z_4(p) = 1.7083 \qquad w_4 = \frac{z_4}{z_4(p)} = \begin{bmatrix} 0.7073 \\ 1 \\ 0.7073 \end{bmatrix} \qquad \frac{1}{z_4(p)} = 0.5854$$

Estos valores son aproximados a los exactos:

$$\lambda = 2 - \sqrt{2} = 0.5858 \qquad x = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7071 \\ 1 \\ 0.7071 \end{bmatrix}$$