UNIVERSIDAD NACIONAL
DE INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA

Departamento Académico de Ciencias Básicas, Humanidades y Cursos Complementarios

CALCULO NUMERICO (MB –535)

DIFERENCIACION E INTEGRACION NUMERICA

2009-1

Diferenciación Numérica

Introducción

El cálculo de la derivada de una función puede ser un proceso "difícil" ya sea por lo complicado de la definición analítica de la función o por que esta se conoce únicamente en un número discreto de puntos. (Este es el caso si la función representa el resultado de algún experimento).
El problema de diferenciación numérica aparentemente es semejante al de la integración numérica, o sea, una vez que se obtiene el polinomio interpolante de la función f(x), la aproximación de las derivadas se pueden obtener derivando el polinomio, pero se debe tener cuidado. La diferenciación tiende a magnificar las pequeñas discrepancias o errores en una función aproximada como se muestra en la figura 1.

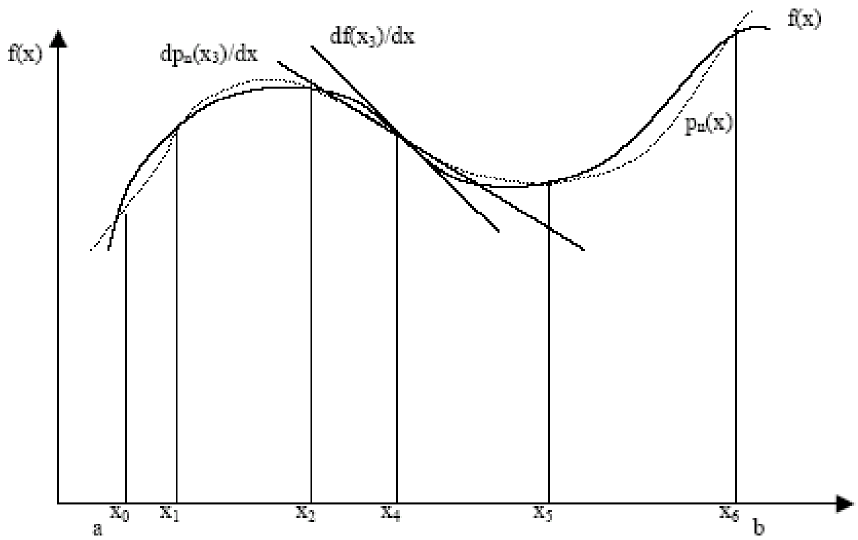


Figura 1 Aproximación a la derivada usando la derivada de un polinomio

Por la Figura 1, un polinomio $p_n(x)$ parece ser una excelente función para aproximar el integrando de la integral $\int_a^b p_n(x)dx$ por $\int_a^b f(x)dx$. Mientras que, $\dfrac{dp_n(x)}{dx}$ que representa la inclinación de la recta tangente de $p_n(x)$, puede ser significativamente diferente en magnitud a $\dfrac{df(x)}{dx}$, aun en los puntos donde $p_n(x)$ y f(x) tienen el mismo valor. Derivadas de orden superior tienden a magnificar las discrepancias. Asimismo, la diferenciación numérica es un proceso menos preciso de la integración numérica y debe evitarse si fuera posible. En verdad, los Ingeniero y Científicos usan la diferenciación numérica con datos de laboratorio con cierta precisión.
En esta separata estudiaremos técnicas para aproximar las derivadas de una función y veremos el análisis de error de dichas formulas.

Fórmulas para la primera derivada: La definición de la derivada de una función f(x) en el punto "x" esta dada en términos del límite:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

De esta definición podemos decir que si "h" es pequeño entonces:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(Note el símbolo de aproximación). Esto nos da inmediatamente la primera fórmula numérica para aproximar la derivada:

$$\boxed{D_h f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

Antes de ver algunos ejemplos donde usamos esta fórmula, tratemos de contestar la pregunta de ¿Cuán buena es esta aproximación de la derivada?. Por el Teorema de Taylor sabemos que:

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(\xi_x)$$

donde ξ_x esta entre *x* y *x+h*. Si despejamos ahora en esta formula por $f'(x)$ y usamos la definición de $D_h f(x)$ tenemos que:

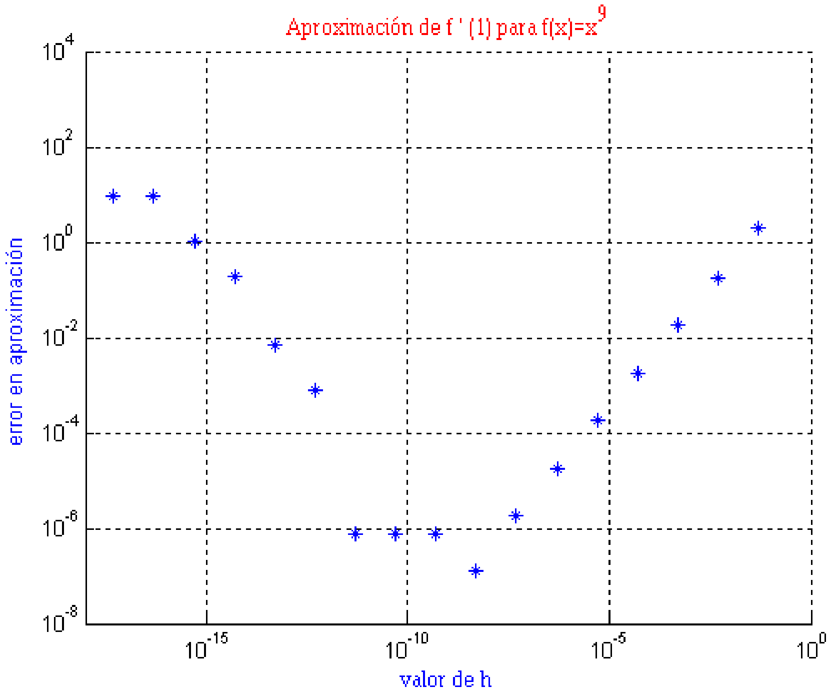
$$f'(x) = D_h f(x) - \frac{h}{2} f''(\xi_x)$$

Esta fórmula nos dice que $D_h f(x)$ aproxima a f '(x) con un error proporcional a "h", i.e., O(h).

Ejemplo 1: Tomamos $f(x) = x^9$ y queremos aproximar $f'(1)$ cuyo valor exacto es nueve. En la siguiente figura ilustramos los errores $|f'(1) - D_h f(1)|$ como función de "h" en escala logarítmica.

Solución:

```
f1=inline('x.^9');
x=1 ; h(1)=0.5; hvals=[]; dfbydx=[];
for i=1:17
   h=h/10;hvals=[hvals h];dfbydx(i)=(f1(x+h)-f1(x))/h;
end
exact=9;loglog(hvals,abs(dfbydx-exact),'*');
axis([1e-18  1 1e-8 1e4])
xlabel('valor de h');ylabel('error en aproximación');
title('Aproximación de f '' (1) para f(x)=x^9')
```



Podemos ver que los errores disminuyen hasta un cierto valor crítico "h_{min}" luego del cual los errores aumentan a pesar de que "*h*" disminuye. ¿Contradice esto el resultado anterior con respecto al O(*h*) del error? **¡NO!** El resultado anterior es sobre la convergencia si la aritmética es exacta y se dice que es un resultado asintótico. La figura ilustra **los efectos de redondeo debido a la aritmética finita** los cuales se hacen significativos para "*h*" pequeño y pueden afectar cualquier fórmula numérica para aproximar la derivada. Sin embargo, una fórmula con un grado de aproximación digamos O(h^2) es preferible que O(h) ya que los errores (teóricos) tienden a cero más rápido y así "*h*" no tiene que ser tan pequeña reduciendo así los efectos de los errores por la aritmética finita.

El método anterior usando la expansión de Taylor se puede utilizar para obtener fórmulas para aproximar la derivada con un grado de aproximación más alto que uno. Ilustramos esto para la obtención de una formula O(h^2). Si en lugar de llegar hasta términos de orden dos, expandimos hasta términos de orden tres en la expansión de Taylor, obtenemos las formulas:

$$f(x+h) = f(x) + h\,f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f'''(\zeta_x)\ ,$$

$$f(x-h) = f(x) - h\,f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{6} f'''(\eta_x)\ .$$

Si restamos estas dos ecuaciones, despejamos para *f* '(x), y usamos el teorema del valor medio aplicado a **f**'''(x) obtenemos la fórmula:

$$f'(x) = D_h^m f(x) - \frac{h^2}{6} f'''(\gamma_x)$$

donde

$$\boxed{D_h^m f(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}}$$

y γ_x esta entre [x-h, x+h]. Tenemos pues que la fórmula $D_h^m f(x)$ tiene un error proporcional a $O(h^2)$.

Ejemplo 2: Comparamos las dos formulas obtenidas hasta ahora para aproximar f '(x) con el ejemplo de $f(x) = x^9$ para $f'(1)$. Los resultados los presentamos en forma tabulada para distintos valores de h:

h	$D_h f(1)$	$\lvert f'(1) - D_h f(1)\rvert$	$D_h^m f(1)$	$\lvert f'(1) - D_h^m f(1)\rvert$
0.1	13.5795	4.57948	9.85264	0.852636
0.05	11.0266	2.02656	9.21079	0.210788
0.025	9.95452	0.954519	9.05255	0.0525492
0.0125	9.46337	0.463374	9.01313	0.0131281

Este ejemplo ilustra lo superior de la formula $D_h^m f(x)$. Note que cada vez que h se divide entre dos, el error en la formula $D_h f(x)$ se divide por dos (aproximadamente) mientras que en la formula $D_h^m f(x)$ se divide (aproximadamente) por cuatro (¿por qué?).

En forma similar se pueden obtener formulas de orden mayor utilizando expansiones de Taylor que envuelvan $x \pm 2h$, $x \pm 3h$, etc. Por ejemplo la expansión:

$$\boxed{f'(x) = \frac{f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)}{12h} + O(h^4)}$$

Da una fórmula de orden cuatro para f '(x). Es importante observar que mientras más alto el grado de aproximación de la fórmula, más suave tiene que ser la función para que dicha aproximación sea valida. Por ejemplo esta fórmula de orden cuatro requiere que la función tenga cinco derivadas continuas en el intervalo en cuestión mientras que la fórmula de orden dos requiere únicamente tres derivadas continuas.

Fórmulas para la segunda derivada: El proceso de arriba se puede usar para obtener fórmulas para las derivadas de orden mayor de uno de una función f(x). Usamos este proceso para obtener una formula para la segunda derivada. Usando el Teorema de Taylor, podemos escribir las expansiones:

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f'''(x) + \frac{h^4}{24} f^{(iv)}(\zeta_x),$$

$$f(x-h) = f(x) - h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{6} f'''(x) + \frac{h^4}{24} f^{(iv)}(\eta_x).$$

Sumando estas dos expansiones y despejando para f''(x) obtenemos:

$$f''(x) = D_h^{(2)} f(x) - \frac{h^2}{12} f^{(iv)}(\gamma_x)$$

Donde:

$$\boxed{D_h^{(2)} f(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}}$$

y γ_x esta entre [x-h, x+h]. Tenemos aquí una fórmula de orden dos para f ''(x).

En forma similar se pueden obtener formulas de orden mayor utilizando expansiones de Taylor que envuelvan $x \pm 2h$, $x \pm 3h$, etc. Por ejemplo la expansión:

$$\boxed{f''(x) = \frac{-f(x-2h) + 16f(x-h) - 30f(x) + 16f(x+h) - f(x+2h)}{12h^2} + O(h^4)}$$

Da una fórmula de orden cuatro para f''(x).

Diferenciación usando polinomios de interpolación: Suponga que $\{x_o, x_1, .., x_n\}$ son puntos distintos y sea $p_n(x)$ el polinomio que interpola a f(x) en estos puntos. Entonces aproximamos f '(x) por:

$$f'(x) = p_n'(x)$$

Suponga que $h = |x_i - x_j|$, i≠j. Se puede demostrar que

$$f'(x) - p_n'(x) = O(h^n) \quad , \quad x \in [x_0, x_n]$$

Aunque no discutiremos en más detalles este método para aproximar derivadas, si mencionamos que las dos fórmulas que discutimos para aproximar f '(x) se pueden obtener usando polinomios de interpolación de grados uno y dos respectivamente.

Ejercicios:

1. Utilice las formulas para aproximar la primera y segunda derivada discutidas en esta lección para aproximar las correspondientes derivadas de la función $f(x) = x^2\cos(x)$ en x=1 y para h=0.1, 0.01.

2. Usando el Teorema de Taylor verifique la fórmula:

$$f'(x) = \frac{f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)}{12h} + O(h^4)$$

3. Para la fórmula $D_h^{(2)}f(x)$ repita un proceso similar al del Ejemplo 1 donde "h" se disminuye hasta que el error en la fórmula empieza a aumentar.

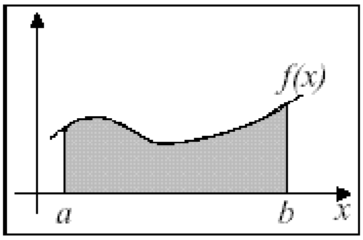
Integración Numérica

Introducción

En diversas aplicaciones es necesario calcular la integral definida de una función *f* para la cual no se conoce una expresión explícita de una primitiva, tal primitiva es obtenida aún cuando no se conoce una expresión de la función propiamente dicha. En estas situaciones puede ser utilizada la integración numérica que consiste en aproximar

$$I(f) = \int_b^a f(x)dx$$

Utilizando apenas valores de la función f en un conjunto finito de nodos del intervalo [a; b].



De una forma general, puede decirse que los métodos de integración numérica consiste en aproximar una función f por otra función g cuya primitiva sea más simple de calcular. De esta forma, la integral de f puede ser aproximado por

$$I(f) \approx I(g) = \int_b^a g(x)dx$$

El error cometido en este proceso, es representado por *E*(*f*), y está dado por

$$E(f) = I(f) - I(g) = I(f-g)$$

dado que la integración es un operador linear. Asimismo la aproximación será tanto mejor cuando la función *g* se aproxime mejor a *f* en el intervalo [a; b].

Reglas de Integración Básica

Dado que las funciones polinomiales son simples de integrar, la utilización de polinomios interpolantes en la aproximación de funciones constituyen una herramienta interesante en solución de problema de integración numérica.

Las reglas de integración básicas consiste en aproximar la integral de *f* en [*a*; *b*] por la integral de un polinomio interpolante de *f* en un conjunto de **n** nodos en [*a*; *b*].

Designaremos por $\boldsymbol{p_n}$ un polinomio de grado menor o igual a **n** que interpola a *f* en los nodos $x_0 < x_1 < ... < x_n$, pertenecientes a [*a* ; *b*]. Representando este polinomio en la forma de Newton Gregory, obtenemos:

$$p_n(x) = y_0 + s\Delta y_0 + s(s-1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!} + \cdots + s(s-1)\cdots(s-(n-1))\frac{\Delta^n y_0}{n!} \quad \text{y} \quad s = \frac{x - x_0}{h}$$

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_n(x)dx$$

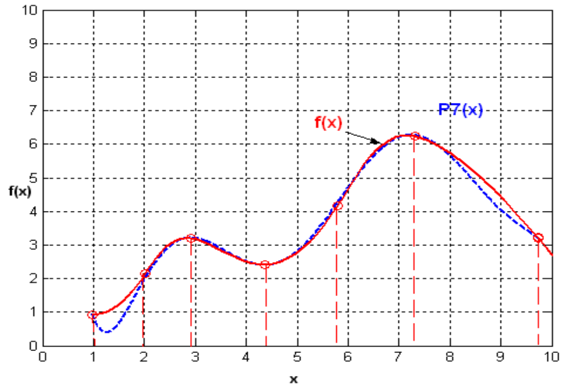


Figura 1 Polinomio interpolador de una función *f*

Para calcular el ***error de integración*** (E_i) basta integrar el error de interpolación (E_T) $E_T(x)=f(x)-P_n(x)$ entonces $f(x)=P_n(x)+E_T(x)$ y de esta forma:

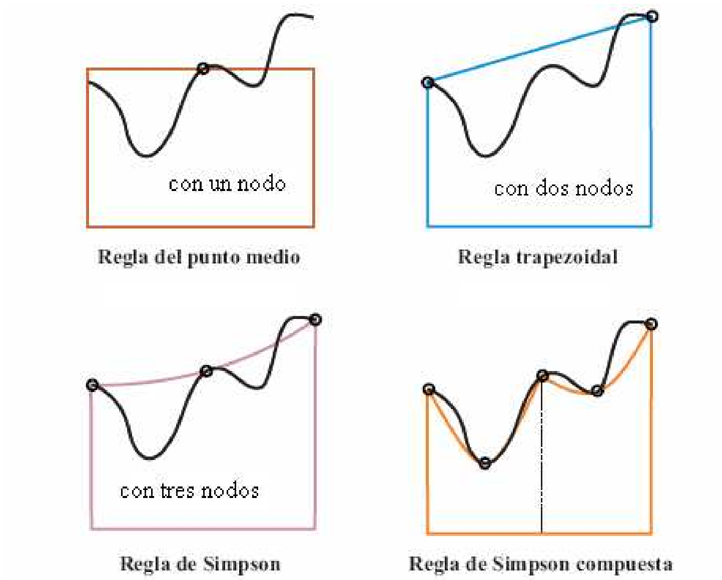
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b p_n(x)dx + \int_a^b E_T(x)dx$$

Luego, el error cometido en la integración vale:

$$E_i = \int_a^b E_T(x)dx$$

Donde: $\boxed{E_T(x) = h^{n+1}s(s-1)(s-2)\cdots(s-n)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}}$ para algún $\xi \in [a,b]$

Reglas de Integración Básica-Ejemplos



Definición.- Una regla de integración se dice de **grado de exactitud**, o **de precisión n** si integra exactamente todos los polinomios de grado menor o igual a **n** y existe por lo menos un polinomio de grado **n+1** que no es integrado exactamente.

Reglas Compuestas de Integración

Consiste en dividir el intervalo [a; b] en sub-intervalos, interpolar *f* en cada uno de los sub-intervalos y aproximar la integral de *f* en [a; b] por la suma de las integrales de los polinomios interpolantes, en su sub-intervalo respectivo.

Sea:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$$

En cada sub-intervalo $[x_{i-1}; x_i]$, la función *f* será interpolada por un polinomio *p*i, de grado menor o igual a k_i. Entonces, la aproximación de la integral de *f* en [a; b] será dada por:

$$\boxed{I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} p_i(x)dx}$$

Representamos h_i el ancho del sub-intervalo $[x_{i-1}; x_i]$, o sea,

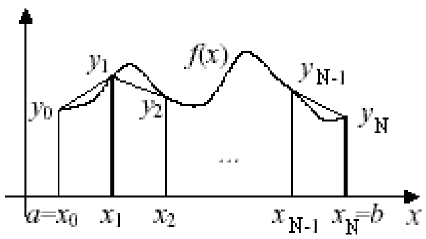
$$h_i = x_i - x_{i-1}.$$

Muchas veces consideramos los sub-intervalos de igual ancho, esto es,

$$h_i = h = \frac{b-a}{N}, \forall i$$

Regla del Trapecio

En cada sub-intervalo es utilizado un polinomio de grado menor o igual a 1 que interpola a *f* en sus extremos.



Siendo *n* el número de sub-intervalos, el ancho de cada sub-intervalo está dada por $h = \dfrac{b-a}{N}$

Los extremos de los sub-intervalos serán los puntos

$x_i = a + ih$, para i=0,1,.., N

Designando por y_i o valor de f en x_i, el polinomio que interpola a f en los puntos x_{i-1} y x_i está dado por:

Regla simple del Trapecio (i=1)

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_i(x)dx = \int_a^b (y_0 + \Delta y_0 s)dx$$

$s=(x-x_0)/h$, ➔ $dx=hds$

Para $x_{i-1} = x_0$ ➔ $s=0$,

$x_i = x_1$ ➔ $s=1$

Integrando el polinomio p_1 en $[x_0; x_1]$ se obtendrá (el área del trapecio!)

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} (y_0 + s\Delta y_0)dx = \int_0^1 (y_0 + s\Delta y_0)hdz = h\left[y_0 s + \frac{s^2}{2}\Delta y_0\right]_0^1$$

$$= h\left[y_0 + \frac{1}{2}\Delta y_0\right]_0^1 = h\left[y_0 + \frac{1}{2}(y_1 - y_0)\right] = \frac{h}{2}(y_0 + y_1)$$

Regla Compuesta del Trapecio

Sumando para todos los sub-intervalos se obtendrá:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} p_i(x)dx = \sum_{i=1}^{N} \frac{h}{2}(y_{i+1} + y_i)$$

La expresión para la regla de integración del trapecio será entonces:

$$\boxed{I \approx \frac{h}{2}(y_o + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{N-1} + y_N)}$$

Error de truncamiento

En el intervalo $[x_{i-1}; x_i]$, el error de aproximación de f por p_i está dado por:

$$E_i = \int_a^b E_T(x)dx = \int_a^b h^2 s(s-1)\frac{f''(\xi)}{2!}dx = \int_0^1 h^2 s(s-1)\frac{f''(\xi)}{2!}hds = h^3\int_0^1 (s^2 - s)\frac{f''(\xi)}{2!}ds$$

$$h^3\frac{f''(\xi)}{2!}\int_0^1 (s^2 - s)ds = h^3\frac{f''(\xi)}{2!}\left[\frac{s^3}{3} - \frac{s^2}{2}\right]_0^1 = h^3\frac{f''(\xi)}{2!}\left[-\frac{1}{6}\right] = -h^3\frac{f''(\xi)}{12}$$

Entonces, el error de aproximación de la regla del Trapecio para un intervalo será:

$$\boxed{E_i = -\frac{h^3}{12}f''(\xi)}$$

El **error de truncamiento de la regla del trapecio compuesta** es la suma de los errores E_i en cada dos sub-intervalos $[x_{i-1}; x_i]$, esto es:

$$E_{trap}=E_1+E_2+\ldots+E_N$$

Donde $E_i = -\frac{h^3}{12} f''(\xi_i) \quad \forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, con i=1,…,N-1,N.

Un límite del error, entonces, será determinado:

$$|E_{trap}| \leq |E_1|+|E_2|+\ldots+|E_N|$$

Siendo $|E_i| = \left|\frac{h^3}{12} M_i\right| \quad y \quad M_i = \max_{x\in[x_{i-1},x_i]} |f''(x)|$

Sea $\quad M_2 = \max_{a\leq x\leq b} |f''(x)|$. Entonces $|E_i| \leq \left|\frac{h^3}{12} M_i\right| \leq \left|\frac{h^3}{12} M_2\right|$

Asimismo, $|E_{trap}| \leq n\frac{h^3}{12} M_2$. Como $N = (b - a)/h$, se tiene que

$$\boxed{E(f) = -(b-a)\frac{h^2}{12} f''(\xi)}$$

Error de redondeo

Considerando que cada y_i tiene un error absoluto máximo ε, el error de redondeo en la regla del trapecio satisfacerá la condición:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_a &\leq \sum_{i=o}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}\left[\frac{h}{2}(y_o + 2y_1 + \ldots + 2y_{N-1} + y_N)\right]\varepsilon \\
&= \frac{h}{2}(\varepsilon + 2\varepsilon + \ldots + 2\varepsilon + \varepsilon) \\
&= \frac{h}{2} 2N\varepsilon \\
&= (b-a)\varepsilon
\end{aligned}$$

Un mejoramiento para el error absoluto total, en la aplicación de la regla del Trapecio, será dado por:

$$|E(f)| + \varepsilon_a$$

Ejemplo:

Siendo $f(x) = e^{-x^2}$, calcular un valor aproximado de $\int_0^1 f(x)dx$ utilizando la regla del trapecio con 20 sub-intervalos y obtener un mejoramiento para el error cometido (considere que los valores de *f* son exactos!). Cuál es el error máximo absoluto admisible para los valores de *f* si se pretender que el error de redondeo no sea superior al error de truncamiento?

Solución:

Siendo h=1/20, la función será evaluada en los puntos:

$x_i = ih$, para i=0.1,…,20

Un valor aproximado de la integral será entonces:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \frac{\frac{1}{20}}{2}\left[e^0 + 2\sum_{i=1}^{19} e^{-\left[\frac{1}{20}\right]^2} + e^{-1}\right] \approx 0.7467$$

Dado que, $f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$ el máximo valor que toma en valor absoluto en el intervalo [0; 1] es 2, concluimos que el máximo error de truncamiento está dado por:

$$\left|\frac{h^2}{12}(b-a)M_2\right| = \frac{(1/20)^2}{12} * 2 \approx 4.2 * 10^{-4}$$

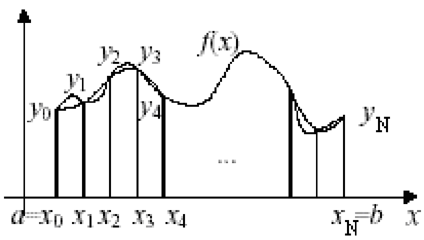
Si se pretende que $\varepsilon_a \le |E(f)|$ se deberá imponer que: $(b-a)\varepsilon \le 4.2 * 10^{-4}$

por lo que $\varepsilon = 4.2x10^{-4}$ será el máximo error absoluto permitido en el cálculo de cada valor de *f*.

Regla de Simpson

Consideremos ahora polinomios de grado menor o igual a 2, cada uno interpolando a *f* en tres puntos igualmente espaciados.

El número n de sub-intervalos deberá ser par, pues cada parábola interpolante es definida en dos sub-intervalos consecutivos.



Definimos nuevamente $h = \frac{b-a}{N}$, los extremos de los sub-intervalos serán los puntos $x_i = a + ih$ para i=0,1,…,N.

Siendo y_i el valor de *f* en x_i, el polinomio p_i que interpola a *f* en los puntos x_{i-1}, x_i y x_{i+1}

Regla Simple de Simpson

La idea es sustituir una función f e integrar por el polinomio de Newton Gregory de grado i=2, esto es, $p_2(x) = y_0 + \Delta y_0 s + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}s(s-1)$

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_2(x)dx = \int_a^b \left(y_0 + \Delta y_0 s + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}s(s-1)\right)dx$$

Teniendo en cuenta la relación entre las variables *s* y *x*, y que $a=x_0$ y $b=x_2$, entonces la expresión anterior admite la siguiente simplificación:

Como $s=\dfrac{(x-x_0)}{h}$ entonces d*s*=1/*h*d*x*, esto es d*x*=*h*d*s*

Para $x=x_0$ ➔s=0

Para $x=x_2$ ➔ s=2

$$I=\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_2(x)dx=\int_0^2\left(y_0+\Delta y_0 s+\frac{\Delta^2 y_0}{2!}s(s-1)\right)hds = h\left(y_0 s+\Delta y_0\frac{s^2}{2}+\frac{\Delta^2 y_0}{2!}\left(\frac{s^3}{3}-\frac{s^2}{2}\right)\right)_0^2$$

$$=h\left(2y_0+2\Delta y_0+\frac{\Delta^2 y_0}{2!}\left(\frac{8}{3}-2\right)\right)=h\left(2y_0+2\Delta y_0+\frac{\Delta^2 y_0}{2!}\left(\frac{2}{3}\right)\right)=h\left(2y_0+2(y_1-y_0)+\frac{1}{3}(y_2-2y_1-y_0)\right)$$

$$=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)$$

Por lo tanto si se sustituye *f* por p_2(x) obtenemos para la integral la siguiente expresión:

$$\boxed{I=\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_2(x)dx \quad \approx \frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)}$$

Regla Compuesta de Simpson

Para obtener la fórmula compuesta de Simpson, se debe dividir el intervalo Integrando p_i en [*a*, *b*] en n sub-intervalos de igual espaciamiento $h=\dfrac{b-a}{N}$ y aplicar a cada par de sub-intervalo $[x_{i-1}; x_i]$,$[x_i; x_{i+1}]$ ∀i=1,2,..,n-1, . De esta forma, se obtiene:

$$I=\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)+\frac{h}{3}(y_2+4y_3+y_4)+\cdots+\frac{h}{3}(y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n)$$

Por tanto:

Sumando para todos los sub-intervalos $[x_{i-1}; x_{i+1}]$, con i = 1; 3; ... ; *N*- 1, se obtiene:

$$\boxed{I(f)=\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+\cdots+2y_{N-2}+4y_{N-1}+y_N)}$$

Donde *n* es un número par.

Error de truncamiento

En el intervalo $[x_{i-1}; x_{i+1}]$, el error de aproximación de *f* por p_i es:

$$e_i(x)=f(x)-p_i(x)=f[x_{i-1},x_i,x_{i+1},x](x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})$$

Entonces, el error de aproximación de $\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)dx$ por $\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} p_i(x)dx$, E_i, será:

$$E_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} e_i(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x](x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1})dx$$

Considerando *f* de clase C^4, se demuestra entonces que:

$$\boxed{E_i = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi_i)}$$

para algún $\xi_i \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$

El error de truncamiento de la Regla de Simpson Compuesta se obtiene ahora por:
El error de la fórmula compuesta es la suma de los errores cometidos en cada dos N/2 pares de sub-intervalos, un par contiene tres puntos, esto es:

$$E_{1s} = E_1 + E_2 + \cdots + E_{N/2}$$

Siendo $E_i = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi_i)$ para $\xi_i \in [x_{2(i-1)}, x_{2i}]$

Determinando un limitante para el error, $M4 = \max\limits_{a \le x \le b} \left| f^{(4)}(x) \right|$. Entonces:

$\left|E_i\right| \le \frac{h^5}{90} M_4 \Rightarrow \left|E_{1s}\right| \le \frac{N}{2}\left|E_i\right| \Rightarrow \left|E_{1s}\right| \le \frac{N}{2}\frac{h^5}{90} M_4$

Con $h = \frac{b-a}{N}$, entonces $\left|E_{1s}\right| \le \frac{(b-a)}{180} h^5 M_4$

El error de la fórmula compuesta de Simpson es, por lo tanto:

$$\boxed{E(f) = -\frac{(b-a)}{180} h^5 M_4}$$

Donde M_4=max $\max\limits_{a \le x \le b} \left| f^{(4)}(x) \right|$

Error de redondeo

Considerando que cada y_i tiene un error absoluto máximo ε, el error de redondeo en la regla de Simpson satisfacerá la condición:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_a &\le \sum_{i=o}^{N} \frac{\partial}{\partial y_i}\left[\frac{h}{3}\left(y_o + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 4y_{N-1} + y_N\right)\right]\varepsilon \\
&= \frac{h}{3}\left(\varepsilon + 4\varepsilon \ + 2\varepsilon + 4\varepsilon \ \ldots + 4\varepsilon + \varepsilon\right) \\
&= \frac{h}{3}\left(\varepsilon + \frac{N}{2}4\varepsilon \ + \left(\frac{N}{2} - 1\right)2\varepsilon + \varepsilon\right) = \frac{h}{3}3N\varepsilon \\
&= (b-a)\varepsilon
\end{aligned}$$

Un mejoramiento para el error absoluto total, en la aplicación de la regla de Simpson, será dado por:

$$\left|E(f)\right| + \varepsilon_a$$

Ejemplo:

Siendo $f(x) = e^{-x^2}$ calcular un valor aproximado de $\int_0^1 f(x)dx$, utilizando la regla de Simpson con 12 sub-intervalos y obtener el error absoluto total cometido (considere que los valores de *f* son exactos!).

Solución:

Siendo $h = \frac{1}{20}$, la función será evaluada en los puntos: $x_i = ih$, para i = 0,1,…,12

Un valor aproximado de la integral, por la regla de Simpson, será entonces:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \frac{1/12}{3}\left[e^0 + 4\sum_{j=0} e^{-\left[\frac{2j+1}{12}\right]^2} + 2\sum_{j=0}^{5} e^{-\left[\frac{2j+2}{12}\right]^2} + e^{-1} \right]$$

$$\approx \quad 0.746825$$

calculando: $f^{(4)}(x)$ se obtiene:

$$f^{(4)}(x) = \left(16x^4 - 48x^2 + 12\right)e^{-x^2}$$

el máximo valor que toma en valor absoluto en el intervalo [0; 1] es 12, concluimos que el máximo error de truncamiento está dado por:

$$\frac{h^4}{180}(b-a)\left| f^{(4)}\right|_{\max} = \frac{(1/12)^4}{180}\times 12 \approx 3.2\times 10^{-6}$$

Regla de Simpson de $\frac{3}{8}$

La regla de Simpson de $\frac{3}{8}$ consiste en aproximar la función mediante una cúbica. El resultado es

$$\boxed{S_{\frac{3}{8}N} = \frac{3h}{8}\left(y_0 + 2\sum_{i=3,6,9,\ldots} y_i + 3\sum_{i=resto} y_i + y_N \right)}$$

con : $h = \frac{b-a}{N}$

Esta regla es más complicada. La primera sumatoria solo incluye aquellas i's que sean múltiplos de 3. La segunda el resto, es decir, las i's que no sean múltiplos de 3. Entre las 2 cubren desde 1 hasta N-1. Para una cúbica se requieren 4 puntos, por lo cual se utilizan 3 intervalos. Por esta razón N debe de ser un múltiplo de 3.

Error de truncamiento:

$$ET = -\frac{(b-a)}{80} h^4 f^{(4)}(\eta)$$

Regla del Rectángulo

Por ultimo consideremos que la función se aproxima por un polinomio de grado 0, es decir, se supone que en cada intervalo la función es constante. Geométricamente se aproxima la integral mediante rectángulos. La formula es

$$\boxed{R_N = h\sum_{i=0}^{N-1} y_i}$$

Error de truncamiento:

$$\boxed{E_T = \frac{b-a}{2} hf(\eta)}$$

<u>Resumen de fórmulas de Newton-Cotes Cerradas</u>

Reciben este nombre cuando el primer y el último dato se consideran dentro del dominio de integración.
Dados los puntos:

x_0	x_1	x_2	...	X_{N-1}	X_N
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_{N-1})$	$f(x_N)$

Las fórmulas cerradas tiene la forma:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \alpha h\big(w_0 f(x_0 + w_1 f(x_1) + ... + w_N f(x_N)\big) + E$$

- **Regla del Trapecio (n=1)**

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}\big(f(x_0) + f(x_1)\big) - \frac{h^3}{12} f''(\varepsilon) \quad donde\ x_0 < \varepsilon < x_1}$$

- **Regla de Simpson 1/3 (n=2)**

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}\big(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\big) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\varepsilon) \quad donde\ x_0 < \varepsilon < x_2}$$

- **Regla de Simpson 3/8 (n=3)**

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3h}{8}\big(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\big) - \frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\varepsilon) \quad donde\ x_0 < \varepsilon < x_3}$$

- **n=4**

$$\boxed{\begin{array}{l}\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = \frac{2h}{45}\left(7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)\right)-\frac{8h^7}{945}f^{(6)}(\varepsilon)\\ donde\ x_0<\varepsilon<x_4\end{array}}$$

Fórmulas de Newton-Cotes Abiertas

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \alpha h\left(w_1 f(x_1)+w_2 f(x_2)+...+w_{n-1}f(x_{n-1})\right)+E$$

Reciben este nombre debido a que no se toman en cuenta los valores extremos dentro del dominio de integración. Las fórmulas cerradas tienen la forma:

- **Regla de Punto medio (n=0)**

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = 2h\left(f(x_1)\right)+\frac{h^3}{3}f''(\varepsilon)\quad donde\ x_0<\varepsilon<x_2}$$

- **n=1**

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3h}{2}\left(f(x_1)+f(x_2)\right)+\frac{3h^3}{4}f''(\varepsilon)\quad donde\ x_0<\varepsilon<x_3}$$

- **n=2**

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = \frac{4h}{3}\left(2f(x_1)-f(x_2)+2f(x_3)\right)+\frac{14h^5}{45}f^{(4)}(\varepsilon)\quad donde\ x_0<\varepsilon<x_4}$$

- **n=3**

$$\boxed{\begin{array}{l}\int_{x_0}^{x_5} f(x)dx = \frac{5h}{24}\left(11f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+11f(x_4)\right)+\frac{95h^5}{144}f^{(4)}(\varepsilon)\\ donde\ x_0<\varepsilon<x_5\end{array}}$$

Cuadratura Gaussiana

Las fórmulas de integración vistas antes requieren que se conozcan los valores de la función cuya integral se va a aproximar en puntos uniformemente espaciados. Sin embargo si la función está dada explícitamente, los puntos para evaluar la función puede escogerse de otra manera que nos lleve a una mayor precisión de la aproximación.
La cuadratura Gaussiana se preocupa en escoger los puntos de evaluación de una manera óptima. Esta presenta un procedimiento para escoger los valores x_1, x_2, ... ,x_n en el intervalo

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$$

[a,b] y las constantes c_1, c_2, ... ,c_n que se espera minimicen el error obtenido al realizar la aproximación:
Para determinar los puntos donde debe evaluarse la función se usan los llamados polinomios ortogonales, siendo las raíces de este polinomio los que se toman como punto de evaluación de la función.

Polinomios ortogonales

Se dice que el conjunto de funciones $\{\psi_1,\psi_2,...,\psi_n\}$ es ortogonal en <a,b> con respecto a la función w(x)≥0, siempre y cuando se cumpla:

$$\int_a^b \psi_k(x)\psi_j(x)w(x)dx = 0 \quad para\ \ j \neq k$$
$$o \quad \int_a^b \psi_k(x)\psi_j(x)w(x)dx > 0 \quad para\ \ j = k$$

Si $\{\psi_1,\psi_2,...,\psi_n\}$ es un conjunto de polinomios ortogonales definidos en el intervalo abierto <a,b> respecto a una función peso continua W y ψ_k es un polinomio de grado k, para todo k=1,2,3,...n : entonces se dice que ψk tiene k raíces distintas y estas raíces se encuentran en el intervalo <a,b>.

Casos importantes de Polinomios Ortogonales

- **Polinomio de Legendre**
- **Polinomio de Laguerre**
- **Polinomio de Hermite**
- **Polinomio de Chebyshev**

Aquí nos ocuparemos del Polinomio de Legendre, el estudiante puede investigar acerca de los otros Polinomios ortogonales.

Polinomio de Legendre

Se considera la función de peso: w(x)=1 y el intervalo de integración [a,b]=[-1,1] y se pueden obtener así:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} \quad para\ n = 0,1,2,.....$$

$$o \quad P_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)$$

Tabla de Polinomios de Legendre:

n	$P_n(x)$
0	1
1	x
2	$(3x^2-1)/2$
3	$(5x^3-3x)/2$
4	$(35x^4-30x^2+3)/8$
5	$(63x^5-70x^3+15x)/8$

Una propiedad de estos polinomios ortogonales es que todas sus raíces son reales y simples, además se encuentran en el intervalo [a,b].

Cuadratura de Gauss-Legendre:

Consideremos la cuadratura Gaussiana para evaluar:

$$I = \int_a^b f(t)dt$$

Donde [a,b]≠[-1,1], los límites de integración debe ser [-1,1] por lo cual recurrimos a un cambio de variable:

$$t = \frac{(b-a)x+(a+b)}{2} \qquad y \qquad dt = \frac{(b-a)}{2}dx$$

Reemplazando tendremos:

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = \frac{(b-a)}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)x+(b+a)}{2}\right)dx = \frac{(b-a)}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i) + E}$$

Siendo x_i las raíces o ceros del polinomio de Legendre de grado "*n*"
Además:

$$c_i = \frac{2}{(P'_n(x_i))^2(1-x_i^{\,2})}$$

$$E = \frac{2^{2n+1}(n!)^4 f^{(2n)}(\theta)}{(2n+1)((2n)!)^3} \qquad \theta \in \langle -1,1 \rangle$$

A continuación se muestra una tabla conteniendo los factores de peso $\mathbf{c_i}$ y los ceros del polinomio de Legendre para $\mathbf{(x_i)}$ para diversos valores de **"N".**

Tabla de Gauss Legendre

N	x_i	c_i
1	0.0	2.0
2	-0.577350269189626 +0.577350269189626	1.0 1.0
3	-0.774596669241483 0.0 +0.774596669241483	0.555555555555556 0.888888888888889 0.555555555555556
4	-0.861136311594053 -0.339981043584856 +0.339981043584856 +0.861136311594053	0.347854845137454 0.652145154862546 0.652145154862546 0.347854845137454
5	-0.906179845938664 -0.538469310105683 0.0 +0.538469310105683 +0.906179845938664	0.236926885056189 0.478628670499366 0.568888888888889 0.478628670499366 0.236926885056189
6	-0.932469514203152 -0.661209386466265 -0.238619186083197 +0.238619186083197 +0.661209386466265 +0.932469514203152	0.171324492379170 0.360761573048139 0.467913934572691 0.467913934572691 0.360761573048139 0.171324492379170

Donde N es el número de puntos

Problemas Resueltos

1. Dados Los siguientes puntos de una función $y = f(x)$

x	0	1	2	3	4
y	0.78	2.04	3.71	4.11	3.89

Determine un valor aproximado de la integral $\int_0^4 f(x)dx$.

(a) Por la regla del trapecio.
(b) Por la regla de Simpson.
(c) Por el polinomio que interpola aquellos puntos.

Solución:

(a) Regla del Trapecio:

$$I \approx \frac{h}{2}\left(y_0 + 2y_1 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n\right)$$

$$h = x_{i+1} - x_i$$

En este caso, como n = 4 (5 puntos), tenemos

$$\int_0^4 f(x)dx \approx \frac{1}{2}\left(y_o + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4\right) = 12.2(0)$$

(b) Regla de Simpson:

$$\int_0^4 f(x)dx \approx \frac{1}{3}\left(y_o + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + ... + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right)$$

Aplicando la regla de Simpson a este problema, tenemos:

$$\int_0^4 f(x)dx \approx \frac{1}{3}\left(y_o + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4\right) = 12.2(3)$$

(c) Polinomio Interpolante de Newton

Cálculo de la tabla de diferencias,

x_i	$(\Delta^0 y_i)$ y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	0.78				
		1.26			
1	2.04		0.41		
		1.67		−1.68	
2	3.71		−1.27		2.33
		0.40		0.65	
3	4.11		−0.62		
		−0.22			
4	3.89				

El polinomio interpolante de Newton $P_4(x)$ se obtiene directamente a partir da tabla de diferencias,

$$P_4(x) = \frac{0.78}{0!} + \frac{1.26}{1!}(x-0) + \frac{0.41}{2!}(x-0)(x-1) - \frac{1.68}{3!}(x-0)(x-1)(x-2) +$$

$$\frac{2.33}{4!}(x-0)(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$0.78 - 0.0875x + 2.1129x^2 - 0.8625x^3 + 0.0971x^4$$

Por lo tanto la integral de P_4(x) es:

$$\int_0^4 f(x)dx = \left[\frac{0.78}{1}x - \frac{0.0875}{2}x^2 + \frac{2.1129}{3}x^3 - \frac{0.8625}{4}x^4 + \frac{0.0971}{5}x^5\right]_0^4$$
$$\approx 12.1(8)$$

2. Calcule por la regla de Simpson un valor aproximado de la integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx$ con 3 dígitos significativos correctos. Verifique que el valor obtenido está debidamente próximo al valor verdadero integral.

Solución:

El cálculo de la integral: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx$

Con 3 dígitos significativos correctos, equivale a considerar un error máximo absoluto de 5 x 10^{-3}.

En seguida, vamos a calcular el número de intervalos (par) que es necesario considerar en la aplicación de la regla de Simpson:

$$|\varepsilon_t| \le \frac{h^4}{180}|b-a| \max_{a\le\xi\le b}\left|f^{(4)}(\xi)\right| \le 5x10^{-3}$$

En que:

$$\max_{a\le\xi\le b}\left|f^{(4)}(\xi)\right| = \max_{a\le\xi\le b}|\sin(\xi)| = 1 \;\; (b-a) = \frac{\pi}{2},\; h = \frac{b-a}{n}$$

Tenemos entonces:

$$\frac{\left(\frac{\pi}{2n}\right)^4}{180}\times\frac{\pi}{2}\times 1 \le 5\times10^{-3} \;\Leftrightarrow\; n \ge \sqrt[4]{\frac{\pi^5}{2^4\times2\times180\times5\times10^{-3}}} \;\;\to n = 2 \;\;\wedge\;\; h = \frac{\pi}{4}$$

Aplicando la regla de Simpson:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,dx \;\simeq\; \frac{\frac{\pi}{4}}{3}\left[\sin(0) + 4\sin(\frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi}{2})\right] \;\simeq\; 1,00(2).$$

3. Calcular la integral de:
   $\int_1^2 \frac{e^{-x}}{x}\,dx$

   con un error menor que $5x10^{-4}$
   (a) Calcule la integral por la regla de Simpson.
   (b) Cuantos intervalos serán precisos para la regla del trapecio?
   (c) Duplicando el número de intervalos, de que manera serían afectado el error de cada una de las reglas.

Solución:

Cálculo de las
$1^{\underline{a}}$, $2^{\underline{a}}$, $3^{\underline{a}}$ e $4^{\underline{a}}$ derivadas de $f(x)$:

$$f(x)=\frac{e^{-x}}{x};\quad f'(x)=-e^{-x}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right);\quad f''(x)=e^{-x}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right);$$

$$f^{(3)}(x)=-e^{-x}\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{6}{x^3}+\frac{6}{x^4}\right);\quad f^{(4)}(x)=e^{-x}\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{12}{x^3}+\frac{24}{x^4}+\frac{24}{x^5}\right);$$

Todas las derivadas sucesivas de *f*(x) tienen la forma:

$$e^{-x}\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+...\right);$$

Analizando esta expresión fácilmente se concluye que el valor máximo, en el intervalo entre [1; 2] , ocurre para $x = 1$

$$\max_{1\le x\le 2}|f''(x)| \;=\; f''(1)\;\simeq\;1.84$$

$$\max_{1\le x\le 2}\left|f^{(4)}(x)\right| \;=\; f^{(4)}(1)\;\simeq\;23.9$$

a.) Error de Simpson:

Cálculo del número de intervalos (par) de modo de garantizar un error inferior a 5 x 10^{-4} .

$$|\varepsilon_t|\;\le\;\frac{h^4}{180}\;|b-a|\;\max_{a\le\xi\le b}\left|f^{(4)}(\xi)\right|\;\le\;5\times10^{-4}$$

$$\frac{(\frac{1}{n})^4}{180}\times1\times23.9\;\le\;5\times10^{-4}\quad\Leftrightarrow\quad n\;\ge\;\sqrt[4]{\frac{23.9}{180\times5\times10^{-4}}}\;\simeq\;4.04$$

En este caso, para ser totalmente rigorosos deberíamos considerar 6 intervalos (n = 6), no obstante optamos por utilizar apenas 4 intervalos porque la expresión que nos da el error de la regla de Simpson es muy pesimista con respecto al valor obtenido para *n* (4.04) y ligeramente superior a 4.

Aplicando la regla de Simpson, considerando n = 4 , obtenemos entonces:

$$\int_1^2 f(x)\,dx\;\simeq\;\frac{h}{3}\;\left[\,f(1)+4\,f(\frac{5}{4})+2\,f(\frac{3}{2})+4\,f(\frac{7}{4})+\;f(2)\,\right]\;=\;0.170(6)\;.$$

b.) La regla del trapecio

Cálculo del número de intervalos de modo a garantizar un error inferior a $5x10^{-4}$

$$|\varepsilon_t|\;\le\;\frac{h^2}{12}\;|b-a|\;\max_{a\le\xi\le b}|f''(\xi)|\;\le\;5\times10^{-4}$$

$$\frac{(\frac{1}{n})^2}{12}\times1\times1.84\;\le\;5\times10^{-4}\quad\Leftrightarrow\quad n\;\ge\;\sqrt{\frac{23.9}{180\times5\times10^{-4}}}\quad\Longrightarrow\quad n=18$$

c.) Duplicando el número de intervalos:

Regla del trapecio: $\left(\varepsilon_t \sim \frac{1}{n^2}\right)$: el error es dividido por 4

Regla del Simpson: $\left(\varepsilon_t \sim \frac{1}{n^4}\right)$ el error es dividido por 16

4. Utilizando la cuadratura de Gauss-Legendre (n=2), estime la siguiente integral:

$$I = \int_1^{1.5} e^{-t^2}\,dt$$

Solución:

a=1, *b*=2, haciendo $t = \frac{(1.5-1)x + (1.5+1)}{2} = \frac{0.5x + 2.5}{2} = \frac{x+5}{4}$

$$dt = \frac{dx}{4}$$

$$\int_1^{1.5} e^{-t^2}\,dt = \int_{-1}^{1} e^{-\left(\frac{x+5}{4}\right)^2}\left(\frac{1}{4}\right)dx$$

$$F(x) = e^{-\left(\frac{x+5}{4}\right)^2}\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\int_{-1}^{1} F(x)dx \approx c_1F(x_1) + c_2F(x_2)$$

i	c_i	x_i	$F(x_i)$
1	1	+0.5773502692	0.03577622856
2	1	-0.5773502692	0.07362403263

I=0.1094002612

Problemas Propuestos

1.- Calcule

$$\int_2^4 \frac{1}{\ln(x)}\,dx$$

con un error absoluto máximo de 5 x10-4: por la regla del trapecio.

2. Determinar:

$$\int_0^1 \log_e(1+\sin(x))dx,$$

con un error absoluto máximo de 5 x10-4:

a.) Por la Regla del trapecio
b.) Por la Regla de Simpson

3. Utilizando la regla de Simpson, determinar un valor aproximado de π, con error máximo de $5x10^{-5}$. Recuerde que :

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$$

4. Calcular:

$$\int_0^1 x\tan(x)dx,$$

con un error absoluto máximo de $5x10^{-3}$:

(a) Por la regla del trapecio.
(b) Por la regla de Simpson.

Bibliografía

1. Análise Numérica (2003/2004)- Apontamentos da disciplina de Análise Numérica Aníbal Castilho Coimbra de Matos-Setiembre de 2003 http://paginas.fe.up.pt/an/an.pdf
2. Problemas resueltos de integración http://paginas.fe.up.pt/an/problemas/p_integracao.pdf http://paginas.fe.up.pt/an/problemas.html
3. Gerald/Wheatley, Métodos Numéricos Aplicados, 7ma Edición, Addison-Wesley, 2004 http://real.uwaterloo.ca/~sbirkett/syde312%20unit%204.pdf
4. Separatas de Cálculo Numérico 1999-2001 Rosa Garrido – Robert Castro.
5. Separatas de Cálculo Numérico 2001-2004 Rosa Garrido – Robert Castro- Hermes Pantoja

INDICE