UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA
DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE *DACBHCC*

P.A.: 2026-1
Fecha: *21/07/26*
Horario: *14h-15:50h*

EXAMEN SUSTITUTORIO DE MÉTODOS NUMÉRICOS MB536

Coordinador del curso: "Rosa Mercedes Garrido Juárez"
Responsables de la elaboración: "Rosa Garrido Juárez – Robert Castro Salguero – Hermes Pantoja Carhuavilca"

APELLIDOS NOMBRES: ----------

CODIGO UNI: ---------- **SECCION:** ----------

NOTA DEL EXAMEN			
	NUMEROS	**LETRAS**	**Firma del Docente**

INDICACIONES:

1. *Duración: 110 minutos.*
2. *Verificación inicial: Antes de comenzar, revise que el puntaje total del examen sume 20 puntos. Si encuentras alguna inconsistencia, comunícalo de inmediato al docente supervisor.*
3. *Material permitido: Se permite el uso del formulario oficial que se anexara a esta evaluación. Se pueden utilizar calculadoras científicas no programables y sin acceso a internet*
4. *Prohibiciones: Está estrictamente prohibido el uso de celulares, medios de comunicación electrónica y calculadoras con conectividad Wi-Fi o Bluetooth.*
5. *Presentación de respuestas: Escriba sus respuestas de forma clara y ordenada. Asegúrate de que cada paso de tu razonamiento y cálculo esté debidamente justificado. Las respuestas sin justificación no serán calificadas, aunque el resultado sea correcto.*
6. *El desarrollo debe realizarse con lapicero negro o azul*

PARTE I:

PREGUNTA N°01. (1.0 P)

En el taller se fabrica un eje cilíndrico de acero. Con instrumentos de medición se obtiene el diámetro $D = 50 \pm 0.1$ mm y la longitud $L = 200 \pm 0.5$ mm. El volumen se calcula como:

$$V = \frac{\pi D^2 L}{4}$$

a) **(0.3 P)** ¿Qué tipo de error introduce el instrumento de medición y qué tipo introduce el uso de un valor de π en la calculadora?

b) **(0.4 P)** Usando la fórmula de propagación de errores, estime el error relativo y el error absoluto máximo de V. Exprese V con su cota de error.

c) **(0.3 P)** Si solo pudiera mejorar la precisión de uno de los dos instrumentos, ¿cuál elegiría y por qué? Justifique con los términos de la propagación calculada en b).

Solucionario

a) El instrumento introduce un error inherente (de medición/datos); el valor truncado de π introduce un error de redondeo/truncamiento de representación.

b) Propagación (0.4 P). Con $V = \pi D^2 L/4$:

$$\Delta V \approx \left|\frac{\partial V}{\partial D}\right| \Delta D + \left|\frac{\partial V}{\partial L}\right| \Delta L = \frac{\pi D L}{2} \Delta D + \frac{\pi D^2}{4} \Delta L$$

Dividiendo entre V, el error relativo es

$$\frac{\Delta V}{V} \approx 2\frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta L}{L} = 2 \cdot \frac{0.1}{50} + \frac{0.5}{200} = 0.004 + 0.0025 = 0.0065 = 0.65\%$$

Con $V = \frac{\pi(50)^2(200)}{4} = 392\,699.1\ \text{mm}^3$:

$$\Delta V \approx 392\,699.1 \times 0.0065 \approx 2\,552.5\ \text{mm}^3$$

$$V = 392\,699 \pm 2\,553\ \text{mm}^3 \quad (\approx 392.7 \pm 2.6\ \text{cm}^3)$$

c) El del diámetro. Su contribución al error relativo es $2\Delta D/D = 0.40\%$, mayor que la de la longitud ($\Delta L/L = 0.25\%$), porque D aparece al cuadrado en la fórmula: su error relativo se amplifica por el exponente 2 (número de condición del problema respecto de D es 2, respecto de L es 1). Reducir ΔD a la mitad bajaría el error total de 0.65 % a 0.45 %, mientras que hacer lo mismo con ΔL solo lo bajaría a 0.525 %.

PREGUNTA N°02. (1.0 P)

Considere un sistema hipotético de representación en punto flotante basado en el estándar IEEE-754, compuesto por una longitud de palabra de 10 bits, de los cuales 1 bit es para el signo, 4 bits para el exponente y 5 bits para la mantisa. Exprese el número de la constante π≈3.14 en notación binaria, aproximado al número de máquina más cercano en este sistema y calcule el error relativo porcentual que se comete en el almacenamiento del mencionado número.

Solución

a) Notación de máquina del número $\pi \approx 3.14$

1. Conversión a binario: $3.14_{10} \approx 11.0010001\ldots_2$
2. Normalización: $1.10010001\ldots_2 \times 2^1$
3. Cálculo del Exponente Interno (Ei):

   $Bias = 2^{4-1} - 1 = 8 - 1 = 7$
   El exponente interno: $Ei = 1 + 7 = 8$
   Convirtiendo a binario (en 4 bits): $8_{10} = 1000_2$
4. Cálculo de la Mantisa:
   - Los primeros 6 bits fraccionarios son: $100100\ldots$
   - Tomamos los primeros 5 bits por redondeo, Mantisa = 10010
5. **Almacenamiento (Signo | Exponente | Mantisa): 0 | 1000 | 10010**

b) Número de máquina:

$$\boldsymbol{V_{maq} = 1.10010_2 \times 2^1 = 3.125}$$

c) Error relativo porcentual

$$\boldsymbol{E_r = \frac{3.14 - 3.125}{3.14} \times 100 = 0.478\%}$$

El error relativo porcentual que se comete al almacenar el número bajo estas restricciones de bits es aproximadamente de **0.478%**.

PREGUNTA N°03. (1.0 P)

Determinar si la siguiente proposición es verdadero o falso (V o F):

Dada la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, entonces la matriz A es diagonalizable.

Solución

Verdadero

Para $\lambda = 4: \mathrm{ma}(4) = 1.$

Al resolver $(K - 4I)v = 0$ se obtiene $\mathrm{mg}(4) = 1$ y $\mathcal{B}_{E_4} = \{(1 \quad 0 \quad 0)^T\}.$

Para $\lambda = 2: \mathrm{ma}(2) = 2.$ El sistema homogéneo asociado a $K - 2I$ se reduce a la ecuación:

$$2x + y = 0 \Longrightarrow y = -2x.$$

Haciendo $x = s$ y $z = t$, el vector genérico es $(s \quad -2s \quad t)^T = s(1 \quad -2 \quad 0)^T + t(0 \quad 0 \quad 1)^T$. Por tanto, $\mathrm{mg}(2) = 2$ y la base es:

$$\mathcal{B}_{E_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dado que ma(λ) = mg(λ) para todos sus valores propios, A es diagonalizable,

PREGUNTA N°04. (1.0 P)

Demuestre que para encontrar la raíz r-ésima de un número a, la fórmula iterativa del método de Newton-Raphson puede expresarse de la siguiente manera:

$$x_{n+1} = \frac{1}{r}\left[(r-1)x_n + \frac{a}{x_n^{r-1}}\right]$$

Solución:

Para calcular la raíz r-ésima de a, estamos buscando el valor x tal que $x = \sqrt[r]{a}$, lo cual da origen a la función a evaluar: $f(x) = x^r - a = 0$.

Derivamos la función: $f'(x) = rx^{r-1}$.

Reemplazamos en el algoritmo de Newton-Raphson: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f\prime(x_n)}$.

Sustituyendo: $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^r - a}{rx_n^{r-1}}$

Operando la fracción: $x_{n+1} = \frac{rx_n^r - x_n^r + a}{rx_n^{r-1}} = \frac{(r-1)x_n^r + a}{rx_n^{r-1}}$

Factorizando se obtiene la expresión final: $x_{n+1} = \frac{1}{r}\left[(r-1)x_n + \frac{a}{x_n^{r-1}}\right]$.

PREGUNTA N°05. (1.0 P)

Considere el sistema de ecuaciones no lineales:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0,$$
$$g(x,y) = y - e^x + 1 = 0.$$

En MATLAB para localizar las raíces se desea representar en una misma figura las curvas de nivel *f(x,y)=0* y *g(x,y)=0* en la región **[−2,2] × [−2,2]**. Complete el siguiente código:

```
clf

xx = linspace(  -2 ,  2 , 200);

yy = linspace(  -2 ,  2, 200);

[X,Y] = meshgrid( ________ ,  ________ );

f =  ____________________________________________;

g =  ____________________________________________;

contour(___,____,___,[0 0],'r','LineWidth',1.5)

hold on

contour(___,_____,___,[0 0],'b','LineWidth',1.5)

grid on

xlabel('x'); ylabel('y');

legend('f(x,y)=0','g(x,y)=0','Location','best')

title('Soluciones gráficas del sistema')

hold off
```

Solución:

```
clf
xx = linspace(-2, 2, 200);
yy = linspace(-2, 2, 200);
[X,Y] = meshgrid(xx, yy);
f = X.^2 + Y.^2 - 4;
g = Y - exp(X) + 1;
contour(X,Y,f,[0 0],'r','LineWidth',1.5)
hold on
contour(X,Y,g,[0 0],'b','LineWidth',1.5)
grid on
xlabel('x'); ylabel('y');
legend('f(x,y)=0','g(x,y)=0','Location','best')
title('Soluciones gráficas del sistema')
hold off
```

PREGUNTA N°06. (1.0 P)

El análisis de una cuaderna del casco de una embarcación conduce al sistema de equilibrio $\mathbf{Ku} = \mathbf{f}$, donde $\mathbf{u}$ (mm) son los desplazamientos de tres nodos y $\mathbf{f}$ (kN) las cargas:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

a) (0.3 P) ¿Cuándo **falla** la factorización LU sin pivoteo, aunque el sistema tenga solución única? ¿Qué problema adicional (aun sin fallar) corrige el **pivoteo parcial**? Indique una condición suficiente sobre $\mathbf{K}$ que garantice LU sin pivoteo.

b) (0.4 P) Obtenga la factorización $\mathbf{K} = \mathbf{LU}$ (Doolittle, sin pivoteo) y calcule $\det(\mathbf{K})$ a partir de ella.

c) (0.3 P) Resuelva el sistema mediante las sustituciones $\mathbf{Ly} = \mathbf{f}$ y $\mathbf{Uu} = \mathbf{y}$.

Solución

a) LU sin pivoteo falla cuando aparece un **pivote nulo** ($u_{kk} = 0$) durante la eliminación, aunque $\det(\mathbf{K}) \neq 0$ (p. ej., $k_{11} = 0$). Aun sin pivotes nulos, pivotes muy pequeños **amplifican los errores de redondeo** (multiplicadores grandes); el pivoteo parcial elige en cada columna el mayor pivote en valor absoluto, garantizando $|l_{ik}| \leq 1$ y estabilidad numérica. Condición suficiente: $\mathbf{K}$ **estrictamente diagonal dominante** o **simétrica definida positiva** (como toda matriz de rigidez bien planteada) admite LU sin pivoteo.

b) Multiplicadores: $l_{21} = -2/4 = -0.5$, $l_{31} = 1/4 = 0.25$, y tras eliminar, $l_{32} = -1.5/3 = -0.5$:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0.25 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1.5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{K}) = \det(\mathbf{U}) = 4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$$

c) Progresiva $\mathbf{Ly} = \mathbf{f}$:

$$y_1 = 2, \qquad y_2 = 0 - (-0.5)(2) = 1, \qquad y_3 = 3 - 0.25(2) + 0.5(1) = 3$$

Regresiva $\mathbf{Uu} = \mathbf{y}$:

$$u_3 = \frac{3}{3} = 1, \qquad u_2 = \frac{1 + 1.5(1)}{3} = 0.8333, \qquad u_1 = \frac{2 + 2(0.8333) - 1}{4} = 0.6667$$

$$\mathbf{u} = [0.6667 \quad 0.8333 \quad 1.0000]^T \text{ mm} \quad (u_1 = 2/3\,,\ u_2 = 5/6\,,\ u_3 = 1)$$

Verificación: $4(0.6667) - 2(0.8333) + 1 = 2$ ✓.

PREGUNTA N°07. (1.0 P)

Durante la descarga de un banco de condensadores sobre una resistencia, la potencia disipada es $p(t) = 200\,e^{-0.5t}$ W. La energía disipada entre $t = 0$ y $t = 4$ s es

$$E = \int_0^4 200\ e^{-0.5t}\,dt\ \ (\text{J})$$

Se desea estimarla con la regla de Simpson 1/3 compuesta. Se tiene el siguiente script MATLAB incompleto:

```
p = @(t) 200*exp(-0.5*t);
a = 0;  b = 4;  n = 4;      % n subintervalos
h = _____________;          % (i)
t = a:h:b;
y = p(t);
E = (h/3)*(y(1)+4*sum(y(_________))+2*sum(y(_________))+y(end))

% (ii), (iii)
```

a) (0.4 P) Complete los espacios (i), (ii) y (iii) para que el script implemente correctamente Simpson 1/3 compuesto.

b) (0.4 P) Calcule a mano el valor de E que imprimirá el script (use 3 decimales en las evaluaciones de p) y compárelo con el valor exacto $E = 400\,(1 - e^{-2})$.

c) (0.2 P) ¿Por qué n debe ser par en Simpson 1/3 compuesto? ¿De qué orden es el error global de esta regla y qué ocurre con el error si se duplica n?

Solución

a) Script completo

```
h = (b-a)/n;                          % (i)
E = (h/3)*( y(1) + 4*sum(y(2:2:end-1)) ...  % (ii) índices pares: nodos impares 1,3,...
        + 2*sum(y(3:2:end-2)) + y(end) ); % (iii) índices impares interiores: nodos 2,4,
```

Con $n = 4$: (i) h = (b-a)/n $= 1$; (ii) y(2:2:end-1) toma y_2, y_4 (nodos $t = 1,3$, coeficiente 4); (iii) y(3:2:end-2) toma y_3 (nodo $t = 2$, coeficiente 2).

b) Cálculo manual Con $h = 1$, nodos $t = 0,1,2,3,4$:

t	0	1	2	3	4
$p(t)$	200.000	121.306	73.576	44.626	27.067

$E \approx \frac{h}{3}[p_0 + 4(p_1 + p_3) + 2p_2 + p_4] = \frac{1}{3}[200 + 4(121.306 + 44.626) + 2(73.576) + 27.067]$=345.982 J

Error absoluto ≈ 0.117 J (error relativo $\approx 0.034\%$), excelente precisión.

c) Simpson 1/3 ajusta una parábola por cada par de subintervalos (3 nodos), por lo que n debe ser par. El error global compuesto es $O(h^4)$: $E_{err} = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi)$. Al duplicar n ($h \to h/2$), el error se reduce aproximadamente en un factor $2^4 = 16$.

PREGUNTA N°08. (1.0 P)

La masa de partículas capturada por un purificador durante los primeros 4 minutos está dada por:

$$\mathrm{M} = \int_0^4 \mathrm{q(t)}\ \mathrm{dt},$$

donde q(t) es la tasa de captura en mg/min. Para aplicar la cuadratura de Gauss-Legendre de dos puntos, considere el cambio

$$\mathrm{t} = 2\mathrm{z} + 2, \quad -1 \le \mathrm{z} \le 1,$$

y los valores experimentales

$$\mathrm{q}(2 - 2/\sqrt{3}) \approx 4.80, \quad \mathrm{q}(2 + 2/\sqrt{3}) \approx 6.75.$$

Aproxime la masa total M capturada.

Solución

Se utiliza el cambio de variable

$$\mathrm{t} = 2\mathrm{z} + 2.$$
$$\mathrm{dt} = 2\ \mathrm{dz}.$$

Por tanto,

$$\mathrm{M} = \int_0^4 \mathrm{q(t)}\ \mathrm{dt} = \int_{-1}^1 \mathrm{q}(2\mathrm{z} + 2)\cdot 2\ \mathrm{dz}.$$

Así, la función transformada es

$$\mathrm{g(z)} = 2\mathrm{q}(2\mathrm{z} + 2).$$

La fórmula de Gauss-Legendre de dos puntos establece que

$$\mathrm{M} = \int_{-1}^1 \mathrm{g(z)}\ \mathrm{dz} \approx \mathrm{g}(-1/\sqrt{3}) + \mathrm{g}(1/\sqrt{3}).$$

Evaluando la función transformada:

$$\mathrm{g}(-1/\sqrt{3}) = 2\mathrm{q}(2 - 2/\sqrt{3}) \approx 2(4.80) = 9.60,$$
$$\mathrm{g}(1/\sqrt{3}) = 2\mathrm{q}(2 + 2/\sqrt{3}) \approx 2(6.75) = 13.50.$$

Entonces,

$$\mathrm{M} \approx 9.60 + 13.50 = 23.10\ \mathrm{mg}.$$

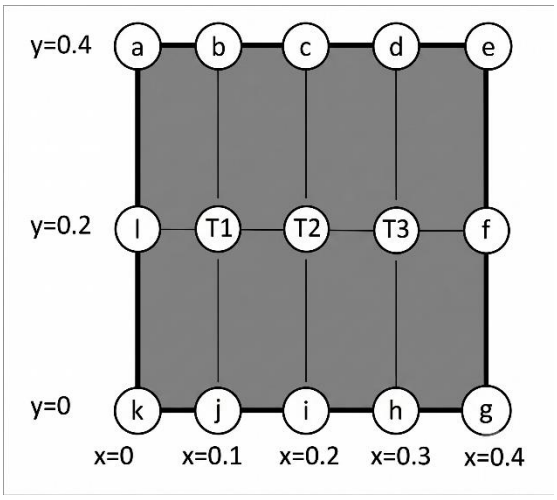
PARTE II:

PROBLEMA N° 1. (4.0 P)

Una placa metálica cuadrada de dimensiones $0.4\,m \times 0.4\,m.$ se encuentra en estado estacionario. La distribución de temperatura $T(x,y)$en la placa puede modelarse mediante la ecuación de Laplace: $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0,$
en el dominio: $R = (x,y): 0 \le x \le 0.4,\ 0 \le y \le 0.4.$
La figura muestra la discretización de la placa utilizando $\Delta x = 0.1$ y $\Delta y = 0.2\,m.$ Las temperaturas desconocidas en los nodos interiores son T_1, T_2, T_3.
Donde T(x,y) denota la temperatura en el nodo (x,y). Las condiciones de frontera (temperaturas de contorno) son:
T(x,0) = 80x + 20 T(x, 0.4) = 80x + 100 para 0 < x < 0.4
T(0,y) = 80 + 35y T(0.4,y) = 25y + 60 para 0 < y < 0.4

a) (0.5 P) Determine las temperaturas en todos los nodos de la frontera utilizando las condiciones de contorno. Para los cuatro vértices, considere que la temperatura es el promedio aritmético de las dos temperaturas de borde que concurren en dicho vértice. Complete la tabla.

a		g	
b		h	
c		i	
d		j	
e		k	
f		l	



b) (1.0 P) Plantee el sistema lineal de ecuaciones de orden 3, para obtener las Temperaturas en los nodos interiores, utilizando pasos de malla Δx = 0.1 y Δy = 0.2. Para lo cual se usa diferencias finitas centrales, por ejemplo, para el nodo $T_2 = T(0.2,0.2)$:

$$\frac{T_3 - 2T_2 + T_1}{\Delta x^2} + \frac{c - 2T_2 + i}{\Delta y^2} = 0$$

c) (1.0 P) Analice la convergencia del método de Gauss-Seidel para el sistema obtenido.

d) (1.5 P) Realice 03 iteraciones de Gauss-Seidel, partiendo de un vector nulo y estime el error. Muestre la primera iteración paso a paso.

Solución

a) Temperaturas de contorno:

a	97.5	g	54.5
b	108	h	44
c	116	i	36
d	124	j	28
e	94.5	k	57.5
f	65	l	87

b) Planteamiento del sistema de ecuaciones

Utilizamos la aproximación de la ecuación de Laplace por diferencias finitas con pasos de malla asimétricos $\Delta x = 0.1$ $(\Delta x^2 = 0.01)$ y $\Delta y = 0.2$ $(\Delta y^2 = 0.04)$:

$$\frac{T_{\text{der}} - 2T_{\text{cen}} + T_{\text{izq}}}{\Delta x^2} + \frac{T_{\text{arr}} - 2T_{\text{cen}} + T_{\text{aba}}}{\Delta y^2} = 0$$

Multiplicando toda la ecuación por $\Delta y^2 = 0.04$:

$$\left(\frac{0.04}{0.01}\right)\left(T_{\text{der}} - 2T_{\text{cen}} + T_{\text{izq}}\right) + \left(T_{\text{arr}} - 2T_{\text{cen}} + T_{\text{aba}}\right) = 0$$

$$4\left(T_{\text{der}} - 2T_{\text{cen}} + T_{\text{izq}}\right) + T_{\text{arr}} - 2T_{\text{cen}} + T_{\text{aba}} = 0$$

Simplificando términos, se obtiene la regla práctica reducida:

$$-10T_{\text{cen}} + 4\left(T_{\text{der}} + T_{\text{izq}}\right) + T_{\text{arr}} + T_{\text{aba}} = 0$$

Sistema Lineal Representado Matricialmente ($A \cdot T = B$):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{10} & \mathbf{-4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{10} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-4} & \mathbf{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{T_1} \\ \boldsymbol{T_2} \\ \boldsymbol{T_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{482} \\ \mathbf{152} \\ \mathbf{428} \end{bmatrix}$$

c) Análisis de convergencia del método Gauss-Seidel

Una condición suficiente para asegurar la convergencia del método de Gauss-Seidel para cualquier vector inicial $T^{(0)}$ es que la matriz de coeficientes A sea estrictamente dominante por diagonales por filas.
La definición de EDD exige que:

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad \forall i$$

Evaluamos cada fila de la matriz A:

- **Fila 1:** $|a_{11}| = 10$. Suma de extra-diagonales: $|-4| + |0| = 4$.
  - Como $10 > 4$, se cumple de forma estricta.
- **Fila 2:** $|a_{22}| = 10$. Suma de extra-diagonales: $|-4| + |-4| = 8$.
  - Como $10 > 8$, se cumple de forma estricta.
- **Fila 3:** $|a_{33}| = 10$. Suma de extra-diagonales: $|0| + |-4| = 4$.
  - Como $10 > 4$, se cumple de forma estricta.

Conclusión: Dado que la matriz del sistema es estrictamente diagonal dominante por filas, el método iterativo de Gauss-Seidel convergerá de manera garantizada y única hacia la solución exacta del sistema.

d) Iteraciones de Gauss-Seidel y Estimación de Error (1.5 P)

Iteración 1 Paso a Paso

Partimos del vector inicial nulo: $T^{(0)} = (0 \quad 0 \quad 0)^T$.

1. **Cálculo de los nodos:**
   - $T_1^{(1)} = \frac{484+4(0)}{10} = \mathbf{48.4000}$
   - $T_2^{(1)} = \frac{152+4(48.4000)+4(0)}{10} = \mathbf{34.5600}$
   - $T_3^{(1)} = \frac{428+4(34.5600)}{10} = \mathbf{56.6240}$

Vector aproximado actual: $T^{(1)} = (48.4000 \quad 34.5600 \quad 56.6240)^T$

2. **Cálculo del Error:**
   - Vector diferencia: $T^{(1)} - T^{(0)} = (48.4000 \quad 34.5600 \quad 56.6240)^T$
   - Norma del vector diferencia:
   - $\|T^{(1)} - T^{(0)}\|_\infty = \max(48.4000, 34.5600, 56.6240) = \mathbf{56.6240}$
   - Norma del vector actual: $\|T^{(1)}\|_\infty = \max(48.4000, 34.5600, 56.6240) = \mathbf{56.6240}$

Aplicando la fórmula:

$$Error^{(1)} = \frac{56.6240}{56.6240} \times \mathbf{100}\% = \mathbf{100.00}\%$$

Tabla Resumen de Iteraciones

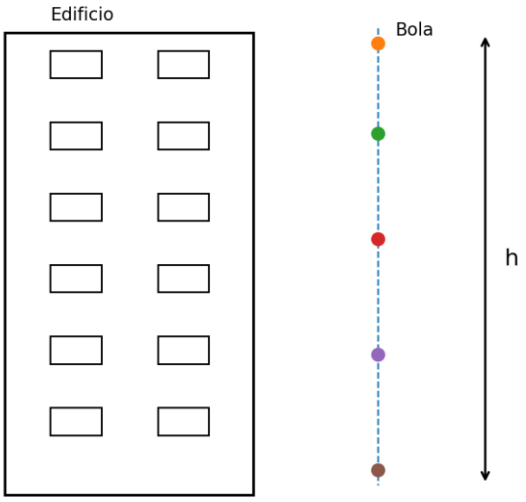
La siguiente tabla presenta los resultados de las 3 iteraciones aplicando el cálculo del error según la norma infinita sobre el último vector aproximado:

Iteración (k)	T1(k)	T2(k)	T3(k)	Error (%)
0	0.0000	0.0000	0.0000	**—**
1	48.4000	34.5600	56.6240	**100.00%**
2	62.2240	62.7392	67.8957	**41.50%**
3	73.4957	71.7565	71.5026	**15.34%**

Se observa que los errores decrecen lo que indica una convergencia y está acorde a los concluido en el ítem c)

PROBLEMA N° 2. (4.0 P)

En un experimento de caída libre, se deja caer una esfera desde la parte superior de un edificio de 100 m de altura. Durante la caída se registra el tiempo t en el que la esfera pasa por distintas alturas h medidas respecto del suelo.



Despreciando la resistencia del aire, el modelo físico es:

$$h = h_0 - \tfrac{1}{2}gt^2, \quad \text{con } h_0 = 100 \text{ m}$$

Al definir X = t² y Y = 100 − h, el modelo puede escribirse como una relación lineal. Para considerar los errores experimentales, ajuste los datos mediante:

$$\hat{Y} = a_0 + a_1 X,$$

h (m)	100	80	60	40	20	0
t (s)	0	2.02	2.86	3.50	4.04	4.51

Responda los siguientes ítems mostrando los cálculos principales:

a) (1.5 P) Calcule los coeficientes a_0 y a_1 del ajuste lineal por mínimos cuadrados.
b) (1 P) Utilizando el modelo ajustado, estime la altura h de la esfera en t=3 s.
c) (1.5 P) Calcule el coeficiente de determinación R^2 . Comente su resultado.

Solución:

Se definen las variables transformadas **X = t²** y **Y = 100 − h**. De este modo, el modelo físico se aproxima mediante la recta de mínimos cuadrados

$$\hat{Y} = a_0 + a_1 X.$$

i	t (s)	X = t²	h (m)	Y = 100 − h	XY	X²
1	0.00	0.0000	100	0	0.0000	0.000000
2	2.02	4.0804	80	20	81.6080	16.649664
3	2.86	8.1796	60	40	327.1840	66.905856
4	3.50	12.2500	40	60	735.0000	150.062500
5	4.04	16.3216	20	80	1305.7280	266.394627
6	4.51	20.3401	0	100	2034.0100	413.719668

Las expresiones de mínimos cuadrados son:

$$a_1 \approx 4.912426.$$
$$a_0 \approx -0.083576.$$

Por tanto, la recta ajustada es:

$$\hat{Y} = -0.083576 + 4.912426X.$$

Como **Y = 100 − h** y **X = t²**, el modelo estimado para la altura es

$$\hat{h}(t) = 100 - \hat{Y} = 100.083576 - 4.912426t^2.$$

Altura estimada después de 3 segundos

$$\text{Para } t = 3 \text{ s: } \quad X = t^2 = 9.$$
$$\hat{Y}(9) = -0.083576 + 4.912426(9) = 44.128259.$$
$$\hat{h}(3) = 100 - 44.128259 = 55.871741 \text{ m}.$$

Respuesta: la esfera se encuentra aproximadamente a 55.87 m sobre el suelo.

Coeficiente de determinación

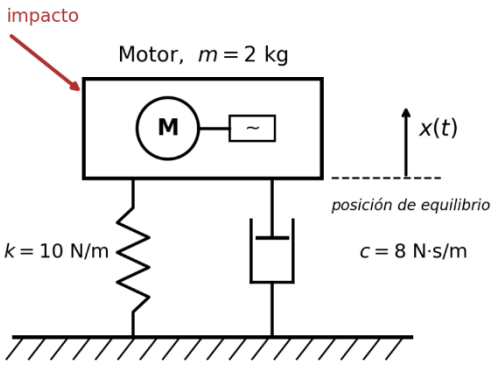
La media de los valores observados es $\bar{Y} = 50.0000$. Con la recta ajustada se calculan los valores predichos y los residuos:

i	X_i	Y_i	$\hat{Y}_i$	$(Y_i - \hat{Y}_i)^2$
1	0.0000	0.0000	−0.0836	0.006985
2	4.0804	20.0000	19.9611	0.001514
3	8.1796	40.0000	40.0981	0.009625
4	12.2500	60.0000	60.0936	0.008769
5	16.3216	80.0000	80.0951	0.009040
6	20.3401	100.0000	99.8357	0.027007

$$S_r = \Sigma(Y_i - \hat{Y}_i)^2 = 0.06293951.$$
$$S_t = \Sigma(Y_i - \bar{Y})^2 = 7000.0000.$$
$$R^2 = 1 - S_r/S_t = 1 - 0.06293951/7000 = 0.9999910086.$$

Interpretación: el valor de R^2 es prácticamente igual a 1, por lo que el modelo lineal explica aproximadamente el 99.9991 % de la variabilidad de los datos transformados. En consecuencia, el ajuste es excelente y los datos experimentales son altamente consistentes con el modelo de caída libre.

PROBLEMA N 3. (4.0 P)



Un motor de $m = 2$ kg está instalado sobre un montaje antivibratorio con rigidez $k = 10$ N/m y amortiguamiento $c = 8$ N·s/m. Tras un impacto, el desplazamiento vertical $x(t)$ (m) del motor respecto de su posición de equilibrio satisface el PVI:

$$\mathbf{2}\,\ddot{x} + \mathbf{8}\,\dot{x} + \mathbf{10}\,x = \mathbf{0}, \qquad x(\mathbf{0}) = \mathbf{0.1m}, \quad \dot{x}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

Se desea estimar la posición en $t = 0.2$ s.

d) **(0.5 P)** Transforme el PVI en un sistema de EDOs de primer orden $\dot{\mathrm{z}} = \mathrm{f}(t, \mathrm{z})$ con $z_1 = x$, $z_2 = \dot{x}$. Escriba f y la condición inicial $\mathrm{z}(0)$.

e) **(1.25 P)** Aplique el método de Euler con paso $h = 0.1$ para estimar $x(0.1)$ y $x(0.2)$. Presente sus resultados en una tabla $(t_i,\ z_{1,i},\ z_{2,i})$.

f) **(1.5 P)** Aplique el método de Heun (Euler mejorado, predictor–corrector) con $h = 0.1$ para estimar $x(0.1)$ y $x(0.2)$. Muestre en cada paso k_1 y k_2.

g) **(0.75 P)** La solución exacta es $x(t) = e^{-2t}(0.1\cos t + 0.2\,\mathrm{sen}\,t)$. Calcule el error absoluto de cada método en $t = 0.2$ s. ¿Los resultados son coherentes con los órdenes de error global de Euler y de Heun? Si el paso se redujera a $h = 0.05$, ¿aproximadamente en qué factor se reduciría cada error?

Solución

a) Sistema de primer orden (0.5 P). Despejando $\ddot{x} = -5x - 4\dot{x}$:

$$\dot{\mathrm{z}} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ -5z_1 - 4z_2 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{z}(0) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Euler, $h = 0.1$ (1.25 P). $\mathrm{z}_{i+1} = \mathrm{z}_i + h\,\mathrm{f}(\mathrm{z}_i)$:

Paso 1: $\mathrm{f}(\mathrm{z}_0) = [0,\ -5(0.1) - 4(0)]^T = [0,\ -0.5]^T$

$$z_{1,1} = 0.1 + 0.1(0) = 0.1, \qquad z_{2,1} = 0 + 0.1(-0.5) = -0.05$$

Paso 2: $\mathrm{f}(\mathrm{z}_1) = [-0.05,\ -5(0.1) - 4(-0.05)]^T = [-0.05,\ -0.3]^T$

$$z_{1,2} = 0.1 + 0.1(-0.05) = 0.095, \qquad z_{2,2} = -0.05 + 0.1(-0.3) = -0.08$$

t_i	$z_{1,i} = x$	$z_{2,i} = \dot{x}$
0.0	0.100000	0.000000
0.1	0.100000	−0.050000
0.2	0.095000	−0.080000

c) Heun, $h = 0.1$ (1.5 P). $\mathrm{k}_1 = \mathrm{f}(\mathrm{z}_i)$, predictor $\mathrm{z}^p = \mathrm{z}_i + h\mathrm{k}_1$, $\mathrm{k}_2 = \mathrm{f}(\mathrm{z}^p)$, $\mathrm{z}_{i+1} = \mathrm{z}_i + \frac{h}{2}(\mathrm{k}_1 + \mathrm{k}_2)$.

Paso 1 ($t = 0 \to 0.1$): $\mathrm{k}_1 = [0,\ -0.5]^T$; predictor $\mathrm{z}^p = [0.1,\ -0.05]^T$; $\mathrm{k}_2 = [-0.05,\ -0.3]^T$

$$z_{1,1} = 0.1 + 0.05(0 - 0.05) = 0.097500, \qquad z_{2,1} = 0 + 0.05(-0.5 - 0.3) = -0.040000$$

Paso 2 ($t = 0.1 \to 0.2$): $\mathrm{k}_1 = [-0.04,\ -5(0.0975) - 4(-0.04)]^T = [-0.04,\ -0.3275]^T$

Predictor: $\mathrm{z}^p = [0.0975 - 0.004,\ -0.04 - 0.03275]^T = [0.0935,\ -0.07275]^T$

$$\mathrm{k}_2 = [-0.07275,\ -5(0.0935) - 4(-0.07275)]^T = [-0.07275,\ -0.1765]^T$$

$$z_{1,2} = 0.0975 + 0.05(-0.04 - 0.07275) = 0.091863, \qquad z_{2,2} = -0.04 + 0.05(-0.3275 - 0.1765) = -0.065200$$

t_i	$z_{1,i} = x$	$z_{2,i} = \dot{x}$
0.0	0.100000	0.000000
0.1	0.097500	−0.040000
0.2	0.091863	−0.065200

d) Errores y órdenes (0.75 P). Valor exacto: $x(0.2) = e^{-0.4}(0.1\cos 0.2 + 0.2\mathrm{sen}0.2) = 0.092330$ m.

$$E_{Euler} = |0.095000 - 0.092330| = 2.670 \times 10^{-3}$$

$$E_{Heun} = |0.091863 - 0.092330| = 4.68 \times 10^{-4}$$

Coherente: Euler tiene error global $O(h)$ y Heun $O(h^2)$, por eso con el mismo paso Heun es un orden de magnitud más preciso (≈ 5.7 veces menor aquí). Al reducir el paso a $h = 0.05$ (mitad), el error de Euler se reduciría aproximadamente a la mitad ($\times 1/2$) y el de Heun a la cuarta parte ($\times 1/4$).