EXAMEN PARCIAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS (MB536)

PARTE I

Responda las siguientes preguntas:

1. **(1.0P)** Considere el siguiente número en base decimal $x = -85.3125$, represente el número x en el estándar IEEE-754 completando la siguiente cadena de bits.

Signo (1b)	**Exponente (8b)**	**Mantisa (23b)**

Solución:

Como $x = -85.3125$, el bit de signo es $S = 1$.
La conversión a binario es:

$$85.3125 = 1010101.0101_2.$$

Luego se normaliza como: $1010101.0101_2 = 1.0101010101_2 \times 2^6$.
Así, el exponente almacenado es: $E = 6 + 127 = 133 = 10000101_2$.
La mantisa: $M = 01010101010000000000000$; completando con ceros hasta 23 bits:
Por tanto:

Signo (1b)	**Exponente (8b)**	**Mantisa (23b)**
1	10000101	01010101010000000000000

2. **(1.0P)** Dada la función

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 1,$$

explique por qué ocurre un error de cancelación cuando $x = 10^{-10}$, proporcione una forma numéricamente estable para calcular su valor.

Solución:

Para $x = 10^{-10}$, se tiene $x^2 = 10^{-20}$ y $\sqrt{1 + x^2} \approx 1$.
Al calcular directamente $\sqrt{1 + x^2} - 1$, se restan dos cantidades casi iguales y se pierden cifras significativas; en aritmética finita puede obtenerse 0. Resultando en un error de cancelación catastrófica.
Una forma estable es racionalizar:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2 + 1} - 1 \\ &= \left(\sqrt{x^2 + 1} - 1\right) \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + 1}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$f(10^{-10}) = \frac{10^{-20}}{\sqrt{1 + 10^{-20}} + 1} \approx \frac{10^{-20}}{2} = 5 \times 10^{-21}.$$

3. **(1.0P)** Encierre con un círculo la alternativa que considere correcta, con respecto a las siguientes afirmaciones sobre la eliminación Gaussiana con pivoteo parcial de fila:

   I. Evita la aparición de pivotes nulos.
   II. Reduce la cantidad de operaciones.
   III. Incrementa los errores de redondeo.
   IV. Mejora la convergencia del método.

   a) VVVF b) FVFF c) VFFF d) VFVV e) VFFV

   Solución:

   VFFF

4. **(1.0P)** Sea la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Si aplicamos el método de la potencia inversa con desplazamiento, con $q = 3$, ¿a qué valor propio debería converger? Justifique su respuesta sin hacer iteraciones.

   Solución:

   El polinomio característico de A es

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 4)(\lambda - 1)^2.$$

   Por tanto, los valores propios son $\lambda = 4$ y $\lambda = 1$ con multiplicidad algebraica 2.
   En el método de la potencia inversa con desplazamiento se converge al valor propio más cercano al desplazamiento q.
   El valor propio más cercano a $q = 3$ es 4. Por ello, el método debería converger a

$$\boxed{\lambda = 4}.$$

5. **(1.0P)** Se sabe que una matriz A de 2×2 es simétrica y admite una factorización LU sin intercambio de filas, donde:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

   Si el primer elemento de la matriz superior es $u_{11} = 2$, ¿cuál es el valor del elemento a_{22} de la matriz A?. Marque con un circulo la alternativa que considere correcta.

   A. 6
   B. 19
   C. 2
   D. 18

   Solución:

   B

6. **(1.0P)** Dada una matriz A cuyos discos de Gershgorin están ambos centrados en -3 con un radio de 5, y sabiendo que sus valores propios son complejos conjugados $\lambda_{1,2} = -3 \pm j4.8$, ¿qué información sobre la "máxima frecuencia de movimiento" nos proporciona el radio de los discos?.

   Seleccione la respuesta y justifique.

   A. El radio de 5 asegura que el sistema es inestable porque el disco invade el semiplano derecho.
   B. El radio de 5 actúa como una cota superior para la frecuencia de oscilación (parte imaginaria), ya que los polos no pueden alejarse del centro más allá de esa distancia.
   C. El radio indica que la frecuencia de oscilación es exactamente 5 rad/s.
   D. El radio no tiene relación con la frecuencia, solo con la tasa de decaimiento del sistema.

   Solución:

   La alternativa correcta es **B**. En el plano complejo, la distancia vertical desde el eje real hasta el polo representa la frecuencia; esta distancia no puede exceder el radio del disco si el centro está sobre el eje real.

7. **(1.0P)** Si una matriz A no tiene diagonal dominante, no se puede asegurar convergencia para los métodos de Jacobi ni Gauss-Seidel; pero si esta es simétrica y definida positiva, a pesar de no ser diagonal dominante, se asegura que ambos métodos convergen. El script en Matlab prueba que A es simétrica y definida positiva y envía un mensaje indicando que ambos métodos convergen.

```
% Definicion de la matriz del problema
A = [10 -8 -5;    -8 15  0;   -5  0  5];

%% 1. Verificacion de Simetria
% Una matriz es simetrica si A es igual a su transpuesta
esSimetrica = all(all(A==A'));

if esSimetrica
    disp('La matriz es SIMETRICA.');
else
    disp('La matriz NO es simetrica.');
end

%% 2. Verificacion de Definida Positiva
% Un metodo rapido es verificar si todos los autovalores son positivos
esDefinidaPositiva = all(all(eig(A)>0));

if esDefinidaPositiva
    disp('La matriz es DEFINIDA POSITIVA.');
else
    disp('La matriz NO es definida positiva.');
end

if esSimetrica & esDefinidaPositiva
    disp('ambos metodos convergen')
end
```

8. **(1.0P)** Para aplicar el método de Newton-Raphson a una ecuación no lineal $f(x) = 0$, se considera el criterio:

$$\phi(x) = \left| \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \right|$$

Si $\phi(x_0) < 1$, el punto inicial x_0 cumple el test de convergencia.

Considere:

$$f(x) = x^4 - 11x + 8, \qquad x_0 = 2$$

Complete los espacios en blanco del código de MATLAB para verificar si $x_0 = 2$ cumple el test. Use comandos simbólicos para calcular las derivadas.

Código en MATLAB

```
% ---- Archivo: test_converg.m ----
function test_converg(f,x0)

    syms x

    df = diff(f,x);  %(1)
    d2f = diff(df,x); %(2)

    df_fu = matlabFunction(df);
    d2f_fu = matlabFunction(d2f); %(3)

    f_x = f(x0);
    df_x = df_fu(x0); %(4)
    d2f_x = d2f_fu(x0); %(5)

    phi_x = (f_x*d2f_x)/(df_x)^2; %(6)

    if abs(phi_x) < 1  %(7)
        disp('Cumple el test de convergencia Newton-Raphson')
    else
        disp('NO cumple el test de convergencia Newton-Raphson')
    end

end
```

Ventana de comandos

```
>> f = @(x) x.^4 - 11*x + 8; %(8)

>> x0 = 2;

>> test_converg(f,x0)
```

PARTE II

Problema 1

Se analiza una placa calefactora con *área efectiva* A, temperatura absoluta T_s y emisividad ε, la cual transfiere energía al ambiente principalmente mediante radiación térmica. El entorno que rodea a la superficie se encuentra a una temperatura T_∞. Este tipo de situación es común en aplicaciones como el diseño de recubrimientos térmicos, el funcionamiento de superficies calefactoras, la medición de sensores infrarrojos y los sistemas de disipación de calor en condiciones de baja convección.

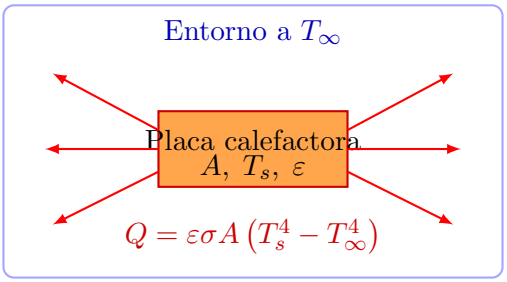


Figure 1: Transferencia de calor por radiación desde una placa al medio ambiente

El flujo neto de calor radiativo emitido por la superficie se modela mediante la ley de Stefan-Boltzmann:

$$Q = \varepsilon\sigma A\left(T_s^4 - T_\infty^4\right)$$

donde σ es la constante de Stefan-Boltzmann. Los valores medidos y sus incertidumbres son:

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= 0.82 \pm 0.02, \\
A &= 0.480\ \text{m}^2 \pm 0.010\ \text{m}^2, \\
T_s &= 620\ \text{K} \pm 1.5\%, \\
T_\infty &= 295\ \text{K} \pm 2\ \text{K}, \\
\sigma &= 5.67 \times 10^{-8}\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}^4} \quad \text{(sin error)}.
\end{aligned}$$

Usando propagación de errores multivariable:

a) **(2.0 P)** Estime el flujo de calor radiativo Q y su máximo error absoluto y relativo.

b) **(1.0 P)** Estime el rango de variación de Q. Comente si la incertidumbre obtenida es pequeña o significativa.

c) **(1.0 P)** Determine cuál de las variables medidas aporta más al error absoluto total de Q. Justifique su respuesta calculando el aporte individual de cada variable a la propagación del error.

Solución:

a) Flujo de calor radiativo

El flujo de calor radiativo se calcula con

$$Q = \varepsilon\sigma A\left(T_s^4 - T_\infty^4\right).$$

Sustituyendo,

$$Q = (0.8200)(5.6700 \times 10^{-8})(0.4800)(620.0000^4 - 295.0000^4) = 3128.6373 \text{ W}.$$

Por lo tanto,

$$\boxed{Q \approx 3128.6373 \text{ W}}.$$

Para la propagación del error absoluto máximo:

$$\Delta Q_{\max} = \left|\frac{\partial Q}{\partial \varepsilon}\right|\Delta\varepsilon + \left|\frac{\partial Q}{\partial A}\right|\Delta A + \left|\frac{\partial Q}{\partial T_s}\right|\Delta T_s + \left|\frac{\partial Q}{\partial T_\infty}\right|\Delta T_\infty.$$

Como $\Delta T_s = 0.0150(620.0000) = 9.3000$ K, los aportes individuales son

Variable	Aporte al error absoluto de Q (W)
ε	76.3082
A	65.1799
T_s	197.8592
T_∞	4.5835

Entonces,

$$\Delta Q_{\max} = 76.3082 + 65.1799 + 197.8592 + 4.5835 = 343.9308 \text{ W}.$$

Así,

$$\boxed{Q = 3128.6373 \pm 343.9308 \text{ W}}.$$

El error relativo máximo es

$$\frac{\Delta Q_{\max}}{Q} \times 100\% = \frac{343.9308}{3128.6373} \times 100\% = \boxed{10.9930\%}.$$

b) Rango de variación de Q

$$Q_{\min} = Q - \Delta Q_{\max} = 3128.6373 - 343.9308 = 2784.7065 \text{ W},$$

$$Q_{\max} = Q + \Delta Q_{\max} = 3128.6373 + 343.9308 = 3472.5681 \text{ W}.$$

Por lo tanto,

$$\boxed{2784.7065 \text{ W} \leq Q \leq 3472.5681 \text{ W}}.$$

Como el error relativo máximo es aproximadamente 10.9930%, la incertidumbre no es despreciable.

c) Variable que aporta más al error absoluto

De la tabla de aportes, el mayor valor corresponde a T_s:

$$\Delta Q_{T_s} = 197.8592 \text{ W}.$$

Por lo tanto,

$\boxed{T_s \text{ es la variable que aporta más al error absoluto total de } Q.}$

Esto se explica porque el modelo depende de la cuarta potencia de la temperatura:

$$Q \propto T_s^4 - T_\infty^4.$$

Problema 2

Considere una barra con una sección variable y espesor constante que está soportando una carga P. La barra está empotrada en uno de los extremos y soporta una carga $P = 1000$ Lb en el otro extremo. Designamos el ancho superior de la barra $w_1 = 2$ pulg. y en la parte inferior es $w_2 = 1$ pulg., su espesor es $t = 0.125$ pulg. y su longitud es $L = 10$ pulg.. Además, $E = 10.4 \times 10^6$ Lb/pulg^2 es el módulo de elasticidad del material, aluminio.

Para la solución se podría considerar 4 elementos finitos representados por elementos rectangulares, los cuales a su vez son modelados por resortes en serie como se muestra en la figura adjunta, donde u_i representa los desplazamientos de cada nodo.

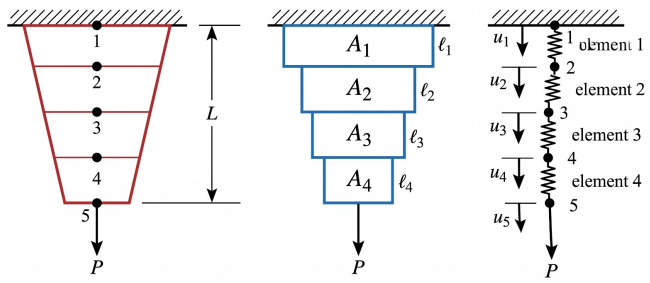


Figure 2: Modelo de barra con sección variable y discretización en elementos finitos.

a) **(0.5 P)** Complete la tabla con los coeficientes de rigidez por elemento, $k = \frac{EA}{L}$.

Propiedades de los elementos

Elemento	Nodo Inicial	Nodo Final	Área (pulg^2)	Longitud (pulg)	k =Coeficiente de Rigidez (Lb/pulg)
1	1	2	0.234375	2.5	
2	2	3	0.203125	2.5	
3	3	4	0.171875	2.5	
4	4	5	0.140625	2.5	

b) **(1 P)** Siendo el desplazamiento del nodo 1, $u_1 = 0$ por estar empotrado. Analice la convergencia del sistema por el criterio de la diagonal estrictamente dominante para Gauss-Seidel.

$$\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \end{Bmatrix}$$

c) **(2 P)** A partir de un vector inicial

$$[0.001, 0.001, 0.001, 0.001]^T$$

realice 03 iteraciones del Método de Gauss-Seidel basado en operaciones elementales y muestre el error en cada iteración indicando la fórmula usada. Comente sus resultados.

d) **(0.5 P)** Determine la longitud final de la barra luego de aplicar la carga.

Solución:

a) Coeficientes de rigidez. Usando $k = EA/L$ se obtiene:

Elem.	**Nodo i**	**Nodo f**	**Área (pulg2)**	**Long. (pulg)**	**k (Lb/pulg)**
1	1	2	0.2344	2.5000	975000
2	2	3	0.2031	2.5000	845000
3	3	4	0.1719	2.5000	715000
4	4	5	0.1406	2.5000	585000

b) Diagonal estrictamente dominante. La matriz numérica es

$$\begin{bmatrix} 1820000 & -845000 & 0 & 0 \\ -845000 & 1560000 & -715000 & 0 \\ 0 & -715000 & 1300000 & -585000 \\ 0 & 0 & -585000 & 585000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1000 \end{Bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} &1820000 > 845000, && \text{Sí cumple,} \\ &1560000 = 845000 + 715000, && \text{No cumple estrictamente,} \\ &1300000 = 715000 + 585000, && \text{No cumple estrictamente,} \\ &585000 = 585000, && \text{No cumple estrictamente.} \end{aligned}$$

La matriz no es estrictamente dominante; por este criterio no se puede asegurar la convergencia de Gauss-Seidel.

c) Iteraciones de Gauss-Seidel. Con $u^{(0)} = [0.0010, 0.0010, 0.0010, 0.0010]^T$:

$$u_2^{(k+1)} = \frac{845000u_3^{(k)}}{1820000}, \quad u_3^{(k+1)} = \frac{845000u_2^{(k+1)} + 715000u_4^{(k)}}{1560000},$$
$$u_4^{(k+1)} = \frac{715000u_3^{(k+1)} + 585000u_5^{(k)}}{1300000}, \quad u_5^{(k+1)} = \frac{1000 + 585000u_4^{(k+1)}}{585000}.$$

La fórmula de error usada es $e^{(k)} = \max |u^{(k)} - u^{(k-1)}|$.

Iter.	u_2	u_3	u_4	u_5	**Error**
0	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	–
1	0.0005	0.0007	0.0008	0.0026	0.0016
2	0.0003	0.0006	0.0015	0.0032	0.0006
3	0.0003	0.0008	0.0019	0.0036	0.0004

- Los desplazamientos aumentan desde el empotramiento hasta la carga.
- El desplazamiento mayor ocurre en el nodo 5, donde se aplica la carga.
- El error disminuye progresivamente: $0.0015501 > 0.0006218 > 0.0004169$.
- Esto confirma la convergencia del método de Gauss-Seidel.
- La convergencia no es muy rápida debido a la dominancia diagonal débil de la matriz.

d) Longitud final. El alargamiento total corresponde al desplazamiento del nodo final: $\delta = u_5$. Con la tercera iteración,

$$\delta \approx 0.0036\,\text{pulg}, \qquad L_f = L + \delta = 10 + 0.0036 = \boxed{10.0036\,\text{pulg}}.$$

Problema 3

En el análisis de un sistema de expansión de gas, la relación entre el volumen molar específico v y la presión neta se modela mediante la función:

$$f(v) = e^{0.5v}\cos(2v) + \frac{1}{v} - 1.5$$

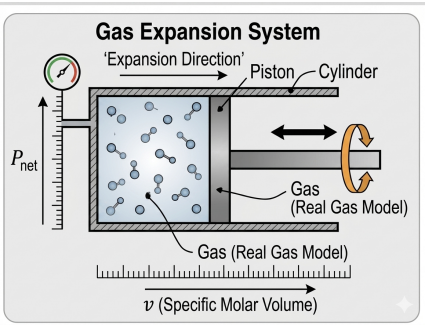


Figure 3: Sistema de expansión de gas

Se solicita:

a) **(1.0P)** Justificación física y localización:

Analice el comportamiento de la función en el intervalo amplio $[0, 3]$.

Justifique físicamente por qué la menor raíz positiva es la más relevante para determinar el límite de compresión del sistema.

Mediante un barrido incremental, aísle dicha raíz en un intervalo $[a, b]$ que tenga una longitud exacta de 0.3.

b) **(1.5P)** A partir del intervalo de longitud 0.3 hallado anteriormente, realice 2 iteraciones $(0, 1, 2)$ del método de Bisección. Reporte los intervalos resultantes y el error máximo estimado en cada paso.

c) **(1.5P)** Tome el *último* valor obtenido por bisección como valor inicial v_0.

Proponga un esquema de iteración de punto fijo de la forma

$$g(v) = v - \frac{1}{A}f(v).$$

Demuestre matemáticamente que el arreglo es convergente en el entorno de la raíz, calculando el supremo L de la derivada $|g'(v)|$ y verificando que $L < 1$ para un valor de $A = -5$.

Realice 3 iteraciones adicionales con este método para obtener el valor de alta precisión del volumen específico.

Estime las cifras significativas exactas del resultado, usando el error de sucesión.

Nota: Utilice radianes para todos los cálculos trigonométricos. Se valorará la organización de las tablas de iteración y la precisión en el uso de la constante de Lipschitz (L) para la prueba de convergencia.

Solución:

a) Justificación física y localización.

En el intervalo $[0, 3]$, la función

$$f(v) = e^{0.5v}\cos(2v) + \frac{1}{v} - 1.5$$

combina los siguientes efectos:

- El término $1/v$ domina cuando $v \to 0$. Físicamente, representa la repulsión molecular o el límite donde el volumen es tan pequeño que la presión tiende a infinito. Esto impide que existan raíces en el origen.
- El término trigonométrico/exponencial genera oscilaciones que representan puntos de equilibrio entre fuerzas expansivas y compresivas.

En un sistema de compresión, la menor raíz positiva representa el volumen de compresión máxima. Superar este punto requeriría una energía muy grande debido a la asíntota en $v = 0$. Las raíces mayores representan estados de expansión o equilibrio en densidades menores; por ello, para el diseño de la cámara de combustión o cilindro interesa el primer punto crítico de equilibrio desde el estado comprimido.

Mediante barrido incremental se identifica un cambio de signo:

$$f(0.6) = e^{0.3}\cos(1.2) + \frac{1}{0.6} - 1.5 \approx (1.3498)(0.3623) + 1.6667 - 1.5 = 0.6557 > 0,$$
$$f(0.9) = e^{0.45}\cos(1.8) + \frac{1}{0.9} - 1.5 \approx (1.5683)(-0.2272) + 1.1111 - 1.5 = -0.7452 < 0.$$

Intervalo aislado:$[a, b] = [0.6, 0.9]$

b) Método de bisección.

Partiendo de $[a_0, b_0] = [0.6, 0.9]$, el error máximo estimado es: $E_{\max} = \frac{b-a}{2}$.

Iter.	a	b	$m = (a+b)/2$	$E_{\max}$
0	0.6000	0.9000	0.7500	0.1500
1	0.6000	0.7500	0.6750	0.0750
2	0.6750	0.7500	0.7125	0.0375

Por lo tanto, luego de dos iteraciones, la raíz queda aislada en

$$\boxed{[0.675, 0.75]}.$$

c) Iteración de punto fijo.

Para $A = -5$, el esquema propuesto es

$$g(v) = v - \frac{1}{A}f(v) = v + 0.2f(v),$$

Derivando,

$$g'(v) = 1 + 0.2f'(v), \qquad f'(v) = 0.5e^{0.5v}\cos(2v) - 2e^{0.5v}\sin(2v) - \frac{1}{v^2}.$$

La constante de contracción se evalúa como el supremo de $|g'(v)|$ en el intervalo inicial $[a, b] = [0.6, 0.9]$:

$$L = \sup_{0.6\le v\le 0.9} |g'(v)| = \sup_{0.6\le v\le 0.9} \left|1 + 0.2f'(v)\right|.$$

Evaluando numéricamente en el intervalo, el valor máximo se alcanza en el extremo derecho $v = 0.9$. Como

$$f'(0.9) = 0.5e^{0.45}\cos(1.8) - 2e^{0.45}\sin(1.8) - \frac{1}{0.9^2} \approx -4.4673,$$

se obtiene

$$L = |1 + 0.2(-4.4673)| \approx \boxed{0.1065}.$$

c) Iteración de punto fijo (continuación).
Como $L < 1$, el arreglo es una contracción en el intervalo inicial $[0.6, 0.9]$, por lo que el método de punto fijo es convergente y presenta convergencia lineal rápida.
Tomando el valor inicial $v_0 = 0.73125$, se obtiene:

n	v_n	$f(v_n)$	v_{n+1}
0	0.731250000	0.023316328	0.735913266
1	0.735913266	0.001611991	0.736235664
2	0.736235664	0.000112752	0.736258214
3	0.736258214	0.000007893	0.736259793

Para estimar las cifras significativas exactas, usamos el error relativo de sucesión. Del paso 2 al 3,

$$\frac{|v_3 - v_2|}{|v_3|} = \frac{|0.736258214 - 0.736235664|}{|0.736258214|} \approx 3.06 \times 10^{-5},$$

Los dígitos 0.7362 permanecen estables; por tanto, el volumen específico aproximado es

$$\boxed{v \approx 0.73626} \qquad \text{y, con 4 cifras significativas,} \qquad \boxed{v = 0.7363}.$$