



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA

DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE CIENCIAS BÁSICAS Y HUMANIDADES

P.A.: 2025-1

Fecha: 11/07/25

## EXAMEN FINAL DE “MÉTODOS NUMÉRICOS (MB536)”

*Coordinador del curso: Mag. Ing. Rosa Garrido Juárez*

### **NOTA IMPORTANTE A LOS ALUMNOS**

ESTÁ TERMINANTEMENTE PROHIBIDO COLOCAR DENTRO DEL CUADERNILLO MARCAS ( TEXTOS O SEÑALES DE CUALQUIER TIPO) QUE PERMITAN DETERMINAR SU IDENTIDAD. **EN CASO DE INCUMPLIMIENTO, EL EXAMEN SERÁ ANULADO, SIN NINGÚN DERECHO DE RECLAMO.**

### **INDICACIONES**

1. **Duración del examen:** 110 minutos.
2. **Verificación inicial:** Antes de comenzar, **revisa que el puntaje total del examen sume 20 puntos**. Si encuentras alguna inconsistencia, comunícalo de inmediato al docente supervisor.
3. **Material permitido:** Se permite el uso de hasta **2 hojas tamaño A4 solamente** con fórmulas (formulario personal). Se pueden utilizar **calculadoras científicas** no programables y **sin acceso a internet**.
4. **Prohibiciones:** Está estrictamente prohibido el uso de **celulares, medios de comunicación electrónica y calculadoras con conectividad Wi-Fi o Bluetooth**.
5. **Presentación de respuestas:** Escribe tus respuestas de forma clara y ordenada. Asegúrate de que **cada paso de tu razonamiento y cálculo esté debidamente justificado**. Las respuestas sin justificación no serán calificadas, aunque el resultado sea correcto.

## EXAMEN FINAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

### PARTE I

Responda las siguientes preguntas:

1. (1.0P) Dado el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$x_1^3 + x_2 - \frac{1}{2} = 0 = f_1(x_1, x_2)$$

$$x_1^2 - x_2^2 = 0 = f_2(x_1, x_2)$$

Complete la siguiente tabla:

Número de soluciones reales	
Jacobiano $J_F$ de la función vectorial $F = [f_1; f_2]$	
Matriz Inversa de $J_F$ evaluada en $[1/2; 1/2]$	
Primera aproximación utilizando el método de Newton con punto inicial $[1/2; 1/2]$	

### Solución

Número de soluciones reales	2
Jacobiano $J_F$ de la función vectorial $F = [f_1; f_2]$	$J_F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 & 1 \\ 2x_1 & -2x_2 \end{pmatrix}$
Matriz Inversa de $J_F$ evaluada en $[1/2; 1/2]$	$J_F^{-1}(1/2, 1/2) = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$
Primera aproximación utilizando el método de Newton con punto inicial $[1/2; 1/2]$	$\frac{3}{7}(1; 1)$ ó (0.4285; 0.4285)

## EXAMEN FINAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

2. (1.0P) Se requiere calcular la energía acumulada en el intervalo  $[0, \pi/2]$  de un proceso físico modelado por:  $f(x) = e^x \cos(x)$ . La energía se obtiene integrando  $f(x)$  en dicho intervalo. Implemente en MATLAB el método del trapecio compuesto y el método de Simpson 1/3 compuesto, ambos con  $n = 4$  subintervalos. Complete los espacios en blanco.

```
clear all
% Define anonymous function

f = @(x) exp(x).*cos(x);

% Symbolic exact integral
syms x
I_sym = int(f(x), 0, pi/2);
I_exact = double(I_sym);
% Composite Trapezoidal Rule
a = 0;
b = pi/2;
n = 4;
h = (b - a) / n;
xvals = [a:h:b];
I_trap = (h/2)*(f(a) + 2*sum(f(xvals(2:end-1))) + f(b));

% Composite Simpson's Rule
xodd = xvals(2:2:n);

xeven = xvals(3:2:n-1);

I_simp = (h/3)*(f(a) + 4*sum(f(xodd)) + 2*sum(f(xeven)) + f(b));
% Error comparison
error_trap = abs(I_trap - I_exact);

error_simp = abs(I_simp - I_exact);
```

## EXAMEN FINAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

3. (1.0P) Dado el conjunto de datos  $x=[1.5,2.0,2.8]$  y  $f(x)=[3.2,4.5,6.8]$  elabore la tabla de diferencias divididas hasta el segundo orden, obtenga el polinomio interpolante de Newton de grado dos y utilícelo para estimar el valor de  $f(2.3)$ .

**Solución:**

Tabla de diferencias divididas:

i	x	f(x)	Diferencias	
0	1.5	3.2	$f[x_0,x_1] = 2.6$	$f[x_0,x_1,x_2] \approx 0.2115$
1	2.0	4.5	$f[x_1,x_2] \approx 2.875$	
2	2.8	6.8		

Polinomio de segundo grado de Newton:

$$P_n(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1](x - x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

$$P_n(x) = 3.2 + 2.6(x - 1.5) + 0.2115(x - 1.5)(x - 2.0)$$

Interpolación en  $x = 2.3$ :

$$P_n(2.3) = 3.2 + 2.6(2.3 - 1.5) + 0.2115(2.3 - 1.5)(2.3 - 2.0)$$

$$P_n(2.3) = 3.2 + 2.08 + 0.05076 = 5.33076 \approx 5.331$$

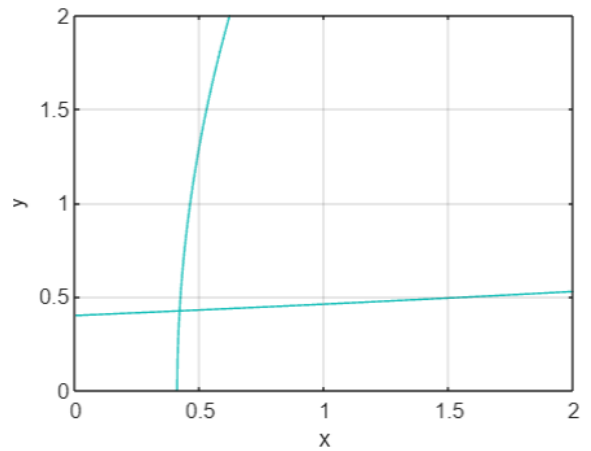


PARTE II

**Problema 1** Sea el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= x^2 - 20x + y^2 + 8 \\ f_2(x, y) &= xy^2 + x - 20y + 8 \end{aligned}$$

- (1.0P)** Plantee un esquema iterativo de aproximaciones sucesivas, garantizando el cumplimiento del criterio de convergencia. Comente acerca de la tasa de convergencia.
- (2.0P)** Realice 03 iteraciones del método de aproximaciones sucesivas a partir del valor inicial mostrado en el gráfico.
- (1.0P)** Calcule el error relativo porcentual en cada iteración utilizando la norma infinita. Analice si los resultados coinciden con lo concluido en el ítem a).



**Solución**

a)

$$\begin{aligned} x &= G_1(x, y) = (x^2 + y^2 + 8)/20 \\ y &= G_2(x, y) = (xy^2 + x + 8)/20 \end{aligned}$$

Tomando punto inicial (0.5,0.5)

$$J = \begin{pmatrix} \frac{x}{10} & \frac{y}{10} \\ \frac{y^2}{20} + \frac{1}{20} & \frac{xy}{10} \end{pmatrix} \quad JJ = \begin{pmatrix} \frac{1}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{40} \end{pmatrix}$$

Se obtiene una norma infinita del Jacobiano de 0.1, por lo que se concluye:

Es arreglo es convergente por ser menor a 1.

La convergencia es bastante rápida por ser un valor muy cercano a 0.

## EXAMEN FINAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

b)

$$x_{n+1} = (x_n^2 + y_n^2 + 8)/20$$
$$y_{n+1} = (x_n y_n^2 + x_n + 8)/20$$

<b>x</b>	<b>y</b>	<b>Err_rel (%)</b>
0.5000000000000000	0.5000000000000000	NaN
0.4250000000000000	0.4312500000000000	17.391304347826090
0.418330078125000	0.425202001953125	1.568647806069194
0.417789839836451	0.424698139676255	0.127205240164495

c) Los errores calculados con la norma infinita toman valores de 17.39%, 1.57% y 0.13%, según la tabla anterior.

Como el error es decreciente el método es convergente

Se observa que la convergencia es rápida por lo que es acorde a lo indicado en a)

**EXAMEN FINAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)**

**Problema 2** En un laboratorio de ingeniería de materiales se realizan pruebas para analizar cómo varía la viscosidad cinemática ( $\mu_k$ , en  $m^2/s \times 10^{-6}$ ) de un lubricante en función de la temperatura ( $T$ , en  $^{\circ}C$ ). Los siguientes datos experimentales, que presentan un grado de ruido inherente a las mediciones, han sido obtenidos:

Temperatura $T$ ( $^{\circ}C$ )	0	20	40	50
Viscosidad $\mu_k$ ( $m^2/s \times 10^{-6}$ )	1.787	1.003	0.659	0.547

(a) **(1.0P)** De la tabla se obtuvo el siguiente polinomio interpolante cúbico

$$P(T) = a \times (T - 20)(T - 40)(T - 50) + b \times T(T - 40)(T - 50) + c \times T(T - 20)(T - 50) + d \times T(T - 20)(T - 40)$$

Halle a, b, c y d.

(b) **(2.0P)** Calcule el **spline cúbico natural** para estimar la viscosidad cinemática a  $35^{\circ}C$ .

(c) **(1.0P)** Utilizando el **spline cúbico natural** obtenido en el inciso (b), calcule la razón de cambio instantáneo de la viscosidad cinemática respecto a la temperatura cuando  $T=20^{\circ}C$ . Adicionalmente, discuta brevemente las ventajas de emplear splines cúbicos en lugar de un único polinomio de alto grado para este tipo de interpolación.

**Solución:**

(a)  $a = P(0)/((-20)(-40)(-50)) = -4.4675 \times 10^{-5}$

$b = P(20)/((20)(-20)(-30)) = 8.3583 \times 10^{-5}$

$c = P(40)/((40)(20)(-10)) = -8.2375 \times 10^{-5}$

$d = P(50)/((50)(30)(10)) = 3.6467 \times 10^{-5}$

(b)

	Temperatura	Viscosidad	f[,]
h1=20	0	1.787	-0.0392
h2=20	20	1.003	-0.0172
h3=10	40	0.659	-0.0112
	50	0.547	

$$\begin{pmatrix} 80 & 20 \\ 20 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.132 \\ 0.0366 \end{pmatrix}$$

$M1=0.00163363$

$M2=0.0000654545$

## EXAMEN FINAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

Cada fila corresponde a un **intervalo de temperatura**:

Intervalo T (°C)	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$d_i$
[0,20]	0.00013636	0	-0.04465	1.787
[20,40]	-0.0001318	0.000818	-0.02829	1.003
[40,50]	-0.0000009	0.00002727	-0.0113818	0.659

### Funciones Spline Cúbico

**Intervalo 1:**  $0 \leq T \leq 20$

$$S_0(T) = 0.00013636 \cdot (T - 0)^3 + 0 \cdot (T - 0)^2 - 0.04465 \cdot (T - 0) + 1.787$$

---

**Intervalo 2:**  $20 \leq T \leq 40$

$$S_1(T) = -0.0001318 \cdot (T - 20)^3 + 0.000818 \cdot (T - 20)^2 - 0.02829 \cdot (T - 20) + 1.003$$

---

**Intervalo 3:**  $40 \leq T \leq 50$

$$S_2(T) = -0.0000009 \cdot (T - 40)^3 + 0.00002727 \cdot (T - 40)^2 - 0.0113818 \cdot (T - 40) + 0.659$$

Evaluando en T=35

$$S_1(35) = 0.718 \cdot 10^{-6}$$

(c)

$$S_0(T) = 0.00013636 \cdot (T - 0)^3 + 0 \cdot (T - 0)^2 - 0.04465 \cdot (T - 0) + 1.787$$

$$S'_0(T) = 3 \cdot 0.00013636 \cdot T^2 - 0.04465$$

$$S'_0(20) = -2.8290 \cdot 10^{-8}$$

Los splines cúbicos evitan oscilaciones excesivas que surgen con polinomios de alto grado, ofrecen mayor estabilidad numérica y precisión local, y permiten ajustar suavemente los datos manteniendo continuidad en las derivadas, siendo ideales para datos con ruido experimental.

## EXAMEN FINAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

### Problema 3

En una autopista mojada por la lluvia, se observa que la resistencia al avance de un automóvil (debida a la fricción con la película de agua en el asfalto) depende de la velocidad del vehículo. Ingenieros de transporte han medido experimentalmente esta fuerza de fricción en varios puntos de velocidad para evaluar el comportamiento del neumático en condiciones húmedas.

La relación entre la fuerza de fricción  $F$  (en N) y la velocidad del vehículo  $v$  (en m/s) es la siguiente:

<b>Velocidad, <math>v</math> (m/s)</b>	0.0	0.5	1.0	1.5
<b>Fuerza, <math>F</math> (N)</b>	0.0	12.5	21.0	28.0

(a) **(2.0P)** Use la regla de Simpson 3/8 para estimar el trabajo en Joules realizado por la fuerza de fricción cuando la velocidad varía desde 0 m/s hasta 1.5 m/s, evaluando la siguiente integral:

$$W = \int_0^{1.5} F(v) dv$$

(b) **(1.0P)** Estime  $W$  usando la regla del trapecio y usando los mismos datos.

(c) **(1.0P)** Calcule el valor de la diferencia entre los resultados obtenidos por Simpson 3/8 y el trapecio. Comente cuál es más preciso y por qué.

### Solución

(a) Método de Simpson 3/8:

$$\text{Sea } h = (1.5 - 0.0)/3 = 0.5$$

$$F(0.0) = 0.0, F(0.5) = 12.5, F(1.0) = 21.0, F(1.5) = 28.0$$

Aplicando la fórmula de Simpson 3/8:

$$W \approx (3h/8) \times [f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3]$$

$$W \approx (3 \times 0.5/8) \times [0.0 + 3(12.5) + 3(21.0) + 28.0]$$

$$W \approx 0.1875 \times [0 + 37.5 + 63 + 28] = 0.1875 \times 128.5 = 24.09375 \text{ J}$$

(b) Regla del trapecio:

$$W \approx h/2 \times [f_0 + 2f_1 + 2f_2 + f_3]$$

$$W \approx 0.5/2 \times [0.0 + 2(12.5) + 2(21.0) + 28.0]$$

## EXAMEN FINAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

$$W \approx 0.25 \times [0 + 25 + 42 + 28] = 0.25 \times 95 = 23.75 \text{ J}$$

El método de Simpson 3/8 da un resultado más preciso ya que considera una mejor aproximación con polinomios de tercer grado.

(c) Cálculo de la diferencia:

$$\text{Error} = |\text{Simpson 3/8} - \text{Trapezio}| = |24.09375 - 23.75| = 0.34375 \text{ J}$$

El método de Simpson 3/8 presenta menor error porque ajusta mejor la curvatura de la función comparado con los segmentos lineales usados en el método del trapecio.

**EXAMEN FINAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)**

**Problema 4** Una polea sólida (disco) de masa  $m_1 = 4.0$  kg y radio  $r = 1.0$  m, está conectada a un resorte torsional con constante  $c_F = 16 \frac{N \cdot m}{rad}$ . Una cuerda enrollada a la polea sostiene una masa  $m_2 = 2.0$  kg en un extremo (el otro extremo está fijo). La gravedad es  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>.

Ecuación del movimiento:

$$\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) \ddot{x} + \frac{c_F}{r^2} x = m_2 g$$

con condiciones iniciales  $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ .

Se pide:

- (1.0P)** Escriba el sistema en forma vectorial  $\dot{\mathbf{Z}} = F(t, \mathbf{Z})$ , donde  $\mathbf{Z} = (x, \dot{x})^T$ . Demuestre que  $F(t, \mathbf{Z})$ , cumple con el teorema de unicidad. ¿Por qué es importante este teorema en la solución numérica?  
Nota: Para la constante de Lipschitz puede usar norma infinita de  $J_F$ .
  - (1.0P)** Aplique dos pasos del método de Euler modificado (Heun) vectorial con  $h = 0.5$  s para aproximar  $\mathbf{Z}(0.5)$  y  $\mathbf{Z}(1.0)$ . (Puede usar el algoritmo por elementos).
  - (1.0P)** Si La solución analítica es:  $x(t) = 1.25(1 - \cos(2t))$ , Calcule el error absoluto en  $t = 0.5$  s y  $t = 1.0$  s comparando con la solución numérica de (b). Justifique cómo el tamaño de paso  $h$  afecta la precisión.
- (1.0P)** Si usáramos el método de Euler explícito (estándar) en lugar del modificado, ¿cómo cambiaría la precisión de los resultados? Justifique en términos de estabilidad y orden del método.

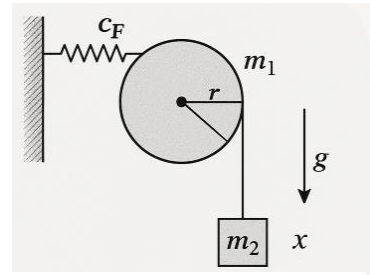


Figura 4 Sistema mecánico

## EXAMEN FINAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

### Solución

a) sea,  $\begin{matrix} z_1 = x \\ z_2 = \dot{x} \end{matrix}$        $\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ 5 - 4 * z_1 \end{bmatrix}$

$\dot{Z} = F(t, Z)$  , Cond. Inicial:  $Z(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Teorema de unicidad  $\frac{\partial F(t,Z)}{\partial Z} = J_F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$   $\| \cdot \|_{\infty} = 4 \leq L$ , la constante de Lipschitz acotada en el dominio. Si cumple el teorema de unicidad.

Es importante porque la solución numérica será estable dentro del dominio de t y será única.

b) Método de Euler modificado,  $h=0.5$  seg.  $N= 2$ pasos.

$z_1 = 0; z_2 = 0$

$$Z^{(1,e)} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + h * \begin{bmatrix} z_2 \\ 5 - 4 * z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

$$Z^{(1)} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + h/2 * \left( \begin{bmatrix} z_2 \\ 5 - 4 * z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_{2e} \\ 5 - 4 * z_{1e} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0.625 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

$z_1 = 0.625; z_2 = 2.5$

$$Z^{(1,e)} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + h * \begin{bmatrix} z_2 \\ 5 - 4 * z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.875 \\ 3.75 \end{bmatrix}$$

$$Z^{(1)} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + h/2 * \left( \begin{bmatrix} z_2 \\ 5 - 4 * z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_{2e} \\ 5 - 4 * z_{1e} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2.1875 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

c)

$t_i$	$x_{euler}$	$x(t)$	<i>Error absoluto</i>
0	0	0	-----
1	0.625	0.5746	0.104
2	2.1875	2.416	0.417
$t_i$	$\dot{x}_{euler}$	$\dot{x}(t)$	<i>Error absoluto</i>
0	0	0	-----
1	2.5	2.1037	0.3963
2	2.5	2.2732	0.2268

El método es de orden 2  $\rightarrow h^2$  errores del orden de  $1/4$  ,

Esta en el orden esperado por h. Al disminuir h, por ejemplo,  $h=1/4$  tendremos errores del orden de  $\approx 0.06$

d) **Euler explícito** es de **orden 1** (error  $O(h)$ ), mientras que **Euler modificado** es de **orden 2** (error  $O(h^2)$ ).

## EXAMEN FINAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

El método explícito sería **menos preciso** para el mismo  $h$ , especialmente en sistemas oscilatorios como este, donde puede introducir **inestabilidades** si  $h$  es grande.