

PARTE I

Responda a las siguientes preguntas

1. **(1.0P)** Sea el sistema de punto flotante basado en la IEEE-754 formado por 9 bits, con la siguiente distribución: Signo (1), Exponente (4), Mantisa (4) ¿cómo se almacenaría el número -300 en su representación binaria?

Solución

Límite inferior de Números Normalizados:

$$\text{Exceso} = 2^{(4-1)} - 1 = 7$$

$$\mathbf{X} = (-1)^{(1)} * (1.1111) * 2^{1110-7} = -248$$

Por lo tanto, el número -300 cae en una zona de desbordamiento de rango conocida como OVERFLOW, por lo tanto, se almacena como -Inf: **1 1111 0000**

2. **(1.0P)** El error por cancelación es cuando se restan dos cantidades parecidas perdiendo cifras significativas. Para la función $f(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}$, se requiere evaluar en $x = 1e^{-20}$, proponga otra forma de evaluar $f(x)$ para evitar el error por cancelación. ¿Cuántas cifras significativas obtuvo?

Solución

$$g(x) = \frac{-2x}{1-x^2}$$

De esta forma se evita la cancelación de cifras significativas.

$$g(1e^{-20}) = -2.0e^{-20} \text{ una cifra significativa.}$$

3. **(1P)** ¿Qué diferencias hay entre la eliminación Gaussiana con la eliminación de Gauss-Jordan?

Solución

La eliminación gaussiana consiste en reducir la matriz a una de forma triangular superior y aplicar proceso regresivo para hallar la solución.

La eliminación por Gauss-Jordan, en cambio, consiste en llevar la matriz a una de forma diagonal con elementos de valor 1, para luego hallar la solución de forma directa

4. Sea la Matriz A en función del parámetro a y b .

$$A(a, b) = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & b & b \\ a & 0 & b & 1 \end{bmatrix}$$

EXAMEN PARCIAL DE METODOS NUMERICOS 2024_1 (MB536)

(0.5P) ¿Para qué valores de a y b es posible la factorización de Doolittle LU?

Solución

$$A = L * U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & -a & -a & -a \\ 0 & 0 & b & b \\ 0 & 0 & 0 & 1-b \end{bmatrix}$$

Si $a \neq 0, b \neq 0 \wedge b \neq 1$, es posible la factorización LU.

(0.5P) ¿Cuál es la traza de la matriz U de Dolittle?

Solución

$$\text{Traza}(U) = a - a + b + 1 - b = 1$$

5. (1P) Sea la siguiente matriz: $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Determine las ecuaciones y las gráficas de los discos de Gershgorin y relaciónelos con sus correspondientes valores propios.

Solución:

Paso #1: Hallar los valores propios de A mediante $|A-\lambda I|=0$

Siendo el polinomio característico: $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 19 = 0$

Teniendo como soluciones los valores propios: $\lambda_1 = -1.583, \lambda_2 = 2.251, \lambda_3 = 5.332$

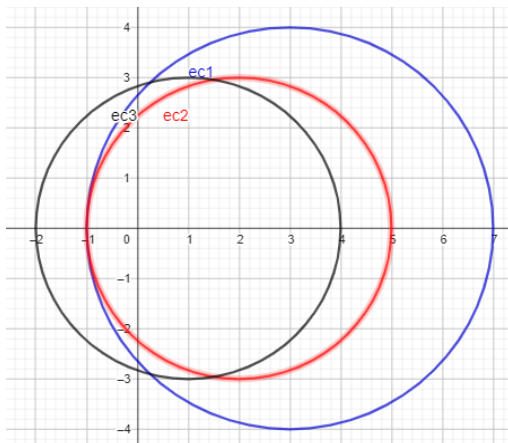
Paso #2: Determinando las ecuaciones de los discos de Gershgorin:

$$C_1: |\lambda - 3| < |0| + |4| \rightarrow |\lambda - 3| < 4$$

$$C_2: |\lambda - 2| < |0| + |3| \rightarrow |\lambda - 2| < 3$$

$$C_3: |\lambda - 1| < |2| + |1| \rightarrow |\lambda - 1| < 3$$

Paso #3: Graficando los discos mencionados:



Paso #4: Determinando las ecuaciones de los discos de Gershgorin:

$$\lambda_3 = 5.332 \text{ pertenece a } C_1: |\lambda - 3| < 4$$

$$\lambda_2 = 2.251 \text{ pertenece a } C_2: |\lambda - 2| < 3$$

$$\lambda_1 = -1.583 \text{ pertenece a } C_3: |\lambda - 1| < 3$$

6. (1P) Sea la matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Realice 02 iteraciones del método de la potencia inversa con desplazamiento, con $q=1$, a partir del vector inicial: $x^{(0)} = [1 \ -1/2]^T$. ¿A qué valor propio converge?

Solución

$$B = (A - qI)^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y^{(1)} = B x^{(0)} = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \left(-\frac{2}{3}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ -3/4 \end{bmatrix} = \mu^{(1)} x^{(1)} \quad \lambda^{(1)} = q + \frac{1}{\mu^{(1)}} = -1/2$$

$$y^{(2)} = B x^{(1)} = \begin{bmatrix} -3/4 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \left(-\frac{3}{4}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ -2/3 \end{bmatrix} = \mu^{(2)} x^{(2)} \quad \lambda^{(2)} = q + \frac{1}{\mu^{(2)}} = -1/3$$

Converge al valor propio inferior: -0.3723

7. (1P) Completar los espacios en blanco de la siguiente función en MATLAB con respecto a la convergencia del método de Gauss-Seidel:

```
% convergeGS.m
% flag=1 Gauss-Seidel convergente
% flag=0 Gauss-Seidel divergente
function [flag]=convergeGS(.....)
    D=.....;
    L=D-tril(A);
    U=D-triu(A);
    Tg=.....;
    rho=max(abs(eig(Tg)));
    if .....
        flag=1;
    else
        flag=0;
    end
end
```

Solución

```
% convergeGS.m
% flag=1 Gauss-Seidel convergente
% flag=0 Gauss-Seidel divergente
function [flag]=convergeGS(A)
    D=diag(diag(A));
    L=D-tril(A);
    U=D-triu(A);
    Tg=inv(D-L)*U;
    rho=max(abs(eig(Tg)));
    if rho<1
        flag=1;
    else
        flag=0;
    end
end
end
```

EXAMEN PARCIAL DE METODOS NUMERICOS 2024_1 (MB536)

8. (1P) Complete el código faltante en función de Matlab denominada *test_converg.m* que pruebe la convergencia de Newton-Raphson para hallar la solución de $x^4 - 11x + 8 = 0$ cercana a $x_0 = 2$, además completar el código de la ventana de comandos para su ejecución.

```
function _____  
% a : valor inicial cercano a la raíz.  
f_x = feval(fx,a); %Función evaluada en a  
df_x = feval(dfx,a); %Función derivada evaluada en a  
d2f_x = _____%Función doble derivada evaluada en a  
phi_x = (f_x*d2f_x)/(df_x)^2;  
if abs(phi_x) < 1  
    disp('Cumple el test de convergencia Newton-Raphson')  
else  
    disp('NO Cumple el test de convergencia Newton-Raphson')  
end
```

Ventana de comandos:

```
>>fx = inline('x^4 - 11*x + 8');  
>>dfx = _____  
>>d2fx = inline('12*x^2');  
>>a=2;  
>> _____% llamar a la función
```

Cumple el test de convergencia Newton-Raphson.

Solución

```
function test_converg(fx,dfx,d2fx,a)  
f_x = feval(fx,a); %Función evaluada en a  
df_x = feval(dfx,a); %Función derivada evaluada en a  
d2f_x = feval(d2fx,a); %Función doble derivada evaluada en a  
phi_x = (f_x*d2f_x)/(df_x)^2;  
if abs(phi_x) < 1  
    disp('Cumple el test de convergencia Newton-Raphson')  
else  
    disp('NO Cumple el test de convergencia Newton-Raphson')  
end
```

EXAMEN PARCIAL DE METODOS NUMERICOS 2024_1 (MB536)

Colocando las entradas en la ventana de comandos:

```
>>fx = inline('x^4 - 11*x + 8');
```

```
>>dfx = inline('4*x^3 - 11');
```

```
>>d2fx = inline('12*x^2');
```

```
>>a=2;
```

```
>> test_converg(fx,dfx,d2fx,a)
```

Cumple el test de convergencia Newton-Raphson

PARTE II

Problema 1

El Esfuerzo de flexión en un tornillo de potencia se puede calcular con la siguiente fórmula:

$$\sigma = \frac{3W(dm - dr)}{dm N b^2}$$

$$b = 0.5 p + (dm - dr) \tan(\varphi/2)$$

Donde:

- W Carga a Elevar o descender (Newtons), $W=8000\pm 3\%$
 dm Diámetro Medio del tornillo, $dm=16.933$ mm, con 3 cde
 dr Diámetro de raíz del tornillo, $14.297\leq dr\leq 14.308$ mm
 N Número de Hilos por pulgada $N=6$
 p Paso de la rosca $p=4.233$ mm
 φ Ángulo entre los flancos de la rosca $\pi/36\pm\pi/720$ rad
 b Espesor del Filete en la raíz de la rosca
 σ Esfuerzo de flexión en la rosca del tornillo y la tuerca N/mm^2
- a) (1.0) Aproxime el espesor de filete (b) y estime su máximo error absoluto.
 b) (2.0) Aproxime el esfuerzo de flexión y su máximo error absoluto y relativo.
 c) (1.0) Estime el rango del esfuerzo de flexión. Comente sobre el resultado teniendo en cuenta que el esfuerzo a la flexión admisible del material es de $160 N/mm^2$.

Solución

a)

$$W=8000 \quad eW=3\%*W=240$$

$$dm=16.933 \quad edm=0.5e-3$$

$$dr=14.3025 \quad edr=0.0055$$

$$N=6$$

$$p=4.233$$

$$\varphi=\pi/36 \quad e\varphi=\pi/72$$

$$b=f_1(dm, dr, \varphi)=2.2314$$

$$\frac{db}{d(dm)} = \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0.0437$$

$$\frac{db}{d(dr)} = -\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = -0.0437$$

$$\frac{db}{d\varphi} = \left(\frac{\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2}{2} + \frac{1}{2}\right) (dm - dr) = 1.3178$$

$$eb=0.0060$$

b)

$$\sigma=f_2(w, dm, dr, \varphi) = 124.8041$$

$$d\sigma/dw = 0.0156$$

$$d\sigma/d(dm) = 35.1905$$

$$d\sigma/d(dr) = -42.5609$$

$$d\sigma/d(\varphi) = -147.4099$$

$$\varepsilon\sigma = \left|\frac{\partial\sigma}{\partial W}\right| \varepsilon W + \left|\frac{\partial\sigma}{\partial dm}\right| \varepsilon dm + \left|\frac{\partial\sigma}{\partial dr}\right| \varepsilon dr + \left|\frac{\partial\sigma}{\partial \varphi}\right| \varepsilon \varphi$$

$$\varepsilon\sigma = 4.6390 (3.717\%)$$

EXAMEN PARCIAL DE METODOS NUMERICOS 2024_1 (MB536)

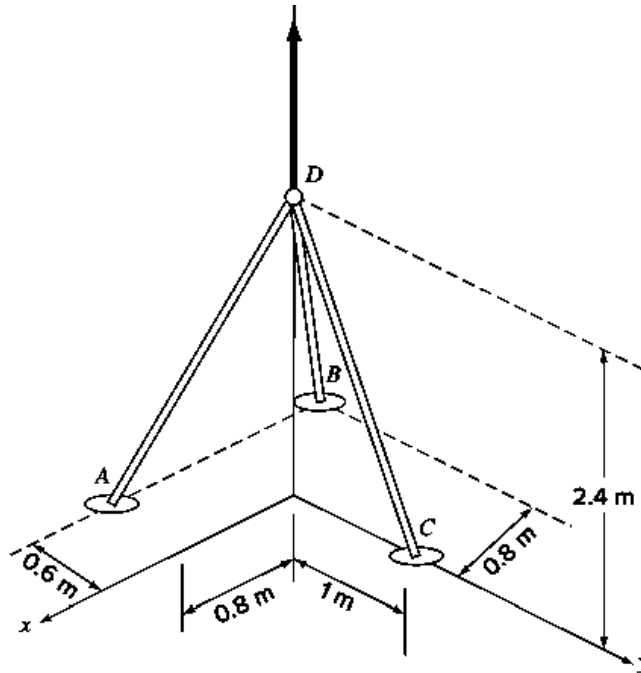
c)

Rango= [121.0871, 128.5212]

El diseño es correcto ya que el esfuerzo de trabajo está por debajo del esfuerzo admisible del material

Problema 2

En la figura se tiene un trípode donde se aplica una fuerza vertical $F_D = 20 \text{ kN}$ hacia arriba, manteniéndose el sistema en equilibrio estático.



Se pide:

- a) **(1.0P)** Demuestre que el modelo del sistema lineal correspondiente es:

$$\begin{bmatrix} 8 & -8 & 0 \\ -6 & -6 & 10 \\ -24 & -24 & -24 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -520 \end{bmatrix}$$

En base a la figura del trípode, la fuerza de aplicación y la condición de equilibrio estático: $F_D = 20 \text{ kN}$, $F_A = x$, $F_B = y$, $F_C = z$.

- b) **(1.5P)** Halle la solución mediante eliminación Gaussiana.
 c) **(0.5P)** Halle las matrices L y U mediante el método Doolittle.
 d) **(1.0P)** ¿El sistema converge para el método Jacobi? No realice iteraciones.

Solución

- a) En base a la figura del trípode, la fuerza de aplicación y la condición de equilibrio estático: $F_D = 20 \text{ kN}$, $F_A = x$, $F_B = y$, $F_C = z$

$$\mathbf{F}_A = F_A * (0.8\mathbf{i} - 0.6\mathbf{j} - 2.4\mathbf{k}) / 2.6$$

$$\mathbf{F}_B = F_B * (-0.8\mathbf{i} - 0.6\mathbf{j} - 2.4\mathbf{k}) / 2.6$$

$$\mathbf{F}_C = F_C * (\mathbf{j} - 2.4\mathbf{k}) / 2.6$$

$$\mathbf{F}_D = 20 \mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_D = \mathbf{0}$$

El sistema de ecuaciones será (en kN):

EXAMEN PARCIAL DE METODOS NUMERICOS 2024_1 (MB536)

$$\begin{bmatrix} 8 & -8 & 0 \\ -6 & -6 & 10 \\ -24 & -24 & -24 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -520 \end{bmatrix} \rightarrow Ax = b$$

- b) Usando eliminación gaussiana, es decir, convertimos a la matriz A en una forma **triangular superior**, mediante operaciones elementales

$$\left| \begin{array}{cccc} 8 & -8 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & 10 & 0 \\ -24 & -24 & -24 & -520 \end{array} \right| \rightarrow \begin{array}{l} f_2: f_2 + \left(\frac{3}{4}\right)f_1 \\ f_3: f_3 + (3)f_1 \end{array} \rightarrow \left| \begin{array}{cccc} 8 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 10 & 0 \\ 0 & -48 & -24 & -520 \end{array} \right|$$

$$f_3: f_3 - (4)f_2$$

Luego, al resolver:

$$\begin{bmatrix} 8 & -8 & 0 \\ 0 & -12 & 10 \\ 0 & 0 & -64 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -520 \end{bmatrix}$$

Obtenemos:

$$x = 325/48; y = 325/48; z = 65/8 \text{ (en kN)}$$

- c) **Doolittle:**

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -8 & 0 \\ -6 & -6 & 10 \\ -24 & -24 & -24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

Resolviendo:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/4 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 8 & -8 & 0 \\ 0 & -12 & 10 \\ 0 & 0 & -64 \end{bmatrix}$$

- d) **Jacobi:** A no es estrictamente dominante, por lo cual no se puede afirmar nada de la convergencia.

$$Tj = D^{-1} * (L + U) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 5/3 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \rho(Tj) = 1.7261 > 1 \rightarrow$$

Por lo tanto, Jacobi es divergente

EXAMEN PARCIAL DE METODOS NUMERICOS 2024_1 (MB536)

Problema 3

- a) **(1P)** Realice tres iteraciones en forma gráfica usando el método de Bisección con intervalo inicial: $[x_L, x_u]$ y reporte los resultados en la tabla 1.

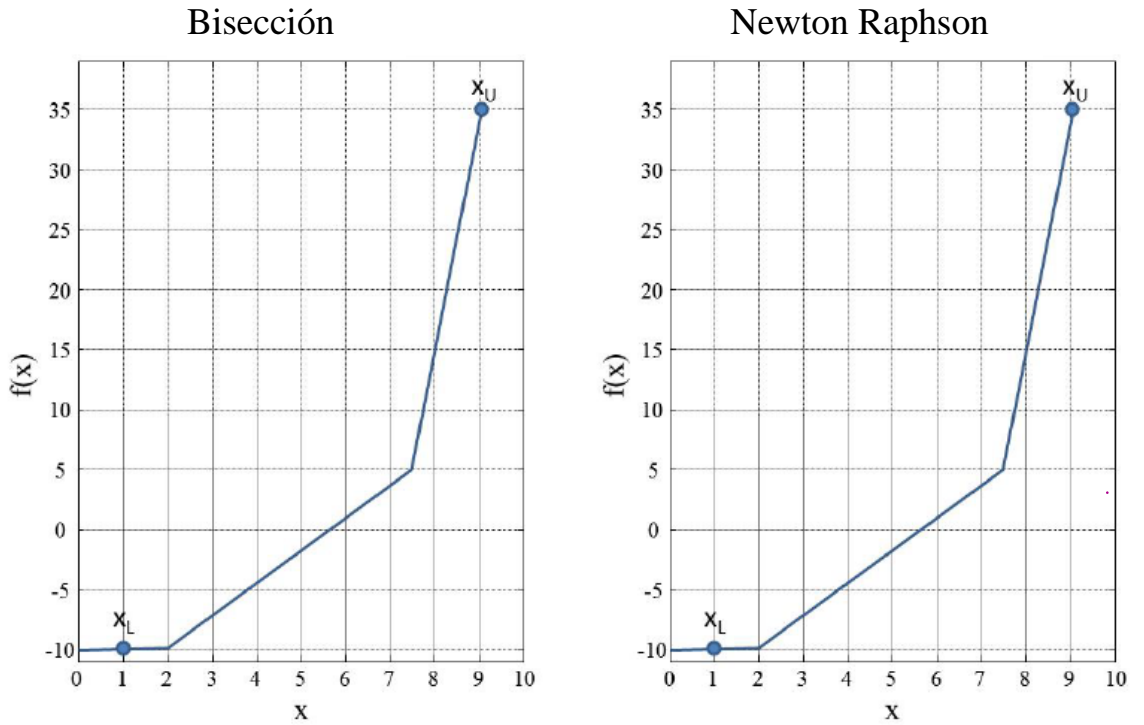


Tabla 1

$k(it)$	a	b	x	$sig(f(a))$	$sig(f(x))$	$error$

x : medio punto del intervalo actual $error = (b-a)/2$

- b) **(1P)** ¿Converge el método de Newton Raphson si empezamos como punto inicial x_L ? Justifique. Si su respuesta fuera negativa use x_u como valor inicial y realice dos iteraciones. ($i=1,2$, la iteración 0 es valor inicial) y reporte en la tabla 2

Tabla 2

$k(it)$	x	$f(x)$

EXAMEN PARCIAL DE METODOS NUMERICOS 2024_1 (MB536)

- c) **(1P)** Determine las iteraciones teóricas que se necesitaría para alcanzar una tolerancia de 10^{-8} usando Bisección. Use como intervalo inicial $[x_L, x_u]$.
- d) **(1P)** Se requiere encontrar el cero de $f(x) = 2x - \tan(x) = 0, x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, determine cuál de los dos arreglos es algoritmo del punto fijo para el dominio indicado. Justifique usando el teorema de convergencia.
- d.1 $g_1(x) = \frac{1}{2} \tan(x)$
- d.2 $g_2(x) = \arctan(2x)$

Solución

- a) **(1P)** Realice tres iteraciones en forma gráfica usando el método de Bisección con intervalo inicial: $[x_L, x_u]$ y reporte los resultados en la tabla 1.

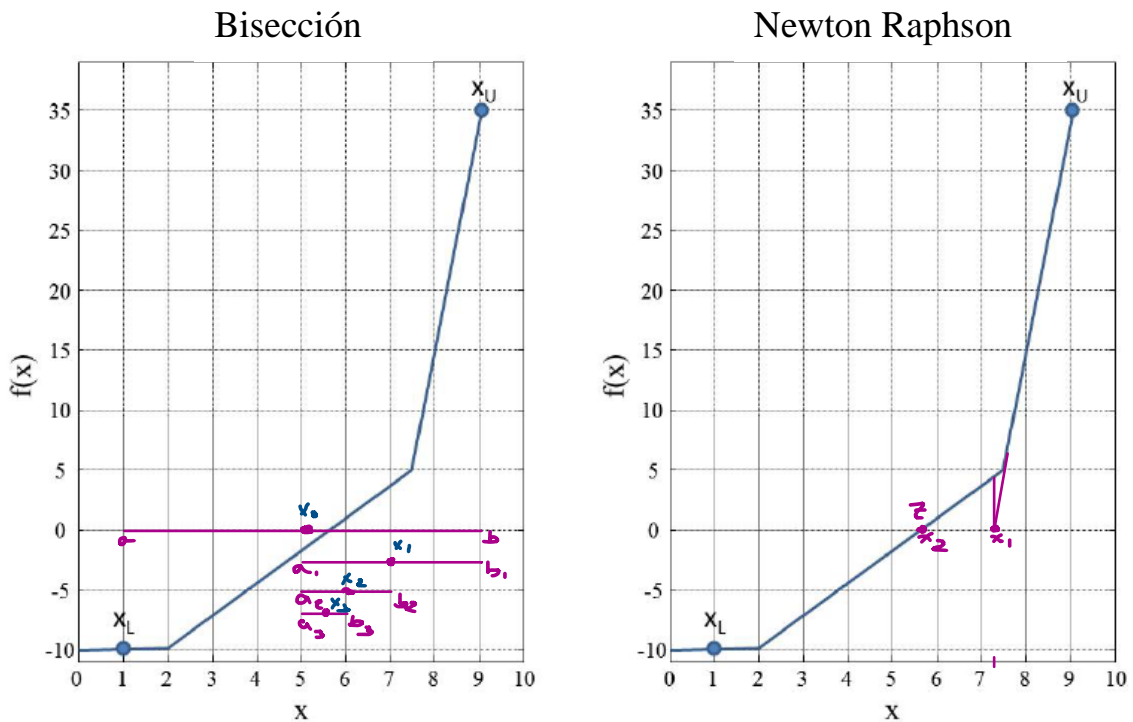


Tabla 1

$k (it)$	a	b	x	$sig(f(a))$	$sig(f(x))$	$error$
0	1	9	5	-	-	4
1	5	9	7	-	+	2
2	5	7	6	-	+	1
3	5	6	5.5	-	-	0.5

x : medio punto del intervalo actual $error = (b-a)/2$

- b) **(1P)** ¿Converge el método de Newton Raphson si empezamos como punto inicial x_L ? Justifique. Si su respuesta fuera negativa use x_u como valor inicial y realice dos iteraciones. (i=1,2, la iteración 0 es valor inicial) y reporte en la tabla 2

EXAMEN PARCIAL DE METODOS NUMERICOS 2024_1 (MB536)

-----No converge porque la derivada en x_L es igual a cero

Tabla 2

k (it)	x	$f(x)$
0	9	35
1	7.25	4.3
2	5.63	0

- c) **(1P)** Determine las iteraciones teóricas que se necesitaría para alcanzar una tolerancia de 10^{-8} . Use como intervalo inicial $[x_L, x_u]$.

$$k > \log\left(\frac{8}{2 \cdot 10^{-8}}\right) / \log(2)$$

$$k = 29$$

- d) **(1P)** Se requiere encontrar el cero de $f(x) = 2x - \tan(x) = 0, x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, determine cuál de los dos arreglos es algoritmo del punto fijo para el dominio indicado. Justifique usando el teorema de convergencia.

d.1 $g_1(x) = \frac{1}{2} \tan(x)$

d.2 $g_2(x) = \arctan(2x)$

Solución

$$a = -1.5608$$

$$|g_2'(x)| = \frac{2}{4x^2+1}$$

$$L = |g_2'(a)| = 0.186 < 1 \text{ Por lo tanto converge.}$$

Para $g_1(x)$ no satisface.