UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA **P.A. 2020-1**
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA **25/09/2020**
DACBHCC **13:30-15:00 h**

EXAMEN FINAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)-(PARTE II)

Indicaciones:

- **U : Último dígito no nulo de su código**
- **P : Penúltimo dígito no nulo de su código**
  Ejm: 20184070E P=7 U=7

Problema 1

Dado el sistema de masa-resorte unidimensional, mostrado en la Fig. A, donde el resorte tiene una constante c=1 y m=1.

A partir de la ley de Newton se deduce la ecuación del movimiento para el sistema masa-resorte: $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m}x = 0$ (1)

La solución analítica para esta ecuación (oscilación harmónica libre de amortiguamiento) puede ser derivada por medio de funciones trigonométricas:

$\boldsymbol{x(t) = \omega_0 cos(\omega_o t)}$ (2)

$\frac{dx}{dt} = v(t) = -x_0\omega_0 sin(\omega_o t)$ (3)

$\frac{d^2x}{dt^2} = a(t) = -x_0\omega_0^2 cos(\omega_o t)$ (4)

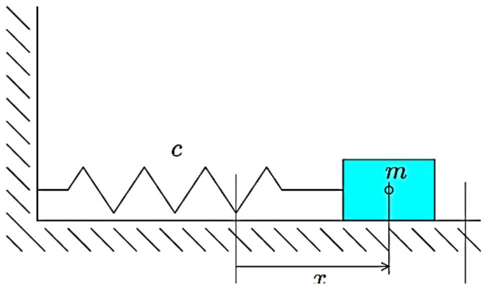


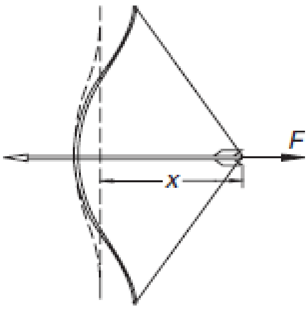
Fig. A Sistema masa-resorte

Donde $\boldsymbol{\omega_0} = \frac{c}{m}$, es la frecuencia natural y $x_0 = 2$ es el desplazamiento del sistema en el t=0.
Según la ecuación (4), la aceleración en valor absoluto en los tiempos t = 1, t = 1.1 y t = 1. 2 es a (1) = 1.0806, a (1.1) = 0.9072 y a (1.2) = 0.7247. Usando un polinomio de Lagrange, determina una parábola a través de estos 3 puntos. Interpolar para t=1.05 y evalué el error cometido.
Se calificará:

a) (**2.0 P**) Los Sub-polinomios $L_i(x)$.
b) (**1.0 P**) La parábola en base al polinomio de Lagrange.
c) (**1.0 P**) Error porcentual cometido al interpolar en t=1.05 seg.

Problema 2

La siguiente tabla muestra la fuerza F ejercida por la cuerda de un arco sobre una flecha, que varía en función del desplazamiento hacia atrás de la flecha (la longitud de tensado x).



x (m)	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25
F (N)	0	37	71	104	134	161
x (m)	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	
F (N)	185	207	225	239	250	

a) **(2.5 P)** Si el arco se estira 0.5 m, utilizando el método de Simpson 1/3 compuesto, determine la velocidad de la flecha de masa = **(10*P+U)/1000** kg cuando sale del arco. Sugerencia: La energía cinética de la flecha es igual al trabajo realizado por el arco.
b) **(1.5 P)** Implemente un Script en Matlab que resuelva el item anterior.

Problema 3

La mayor parte de modelos epidemiológicos se basan en dividir a la población sujeta a la infección en un pequeño número de grupos compartimentados, cada uno de estos grupos está formados por individuos idénticos en términos de su estatus con respecto a la infección en cuestión. En el modelo SIR, existen tres grupos compartimentados:

- Población susceptible (S), individuos sin inmunidad al agente infeccioso, y que por tanto puede ser infectada si es expuesta al agente infeccioso.
- Población infectada (I), individuos que están infectados en un momento dado y pueden transmitir la infección a individuos de la población susceptible con la que entran en contacto.
- Población recuperada y fallecida (R), individuos que son inmunes a la infección (o fallecidos), y consecuentemente no afectan a la transmisión cuando entran en contacto con otros individuos.

La población total es N=S+I+R. Hecha esta compartimentación se hace necesario especificar ecuaciones que describan la variación temporal del número de individuos en cada compartimento y el modelo SIR viene dado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I$$

Si la tasa de transmisión β=0.015 y la tasa de recuperación $\gamma = 1/2$. Considerar que la población suceptible inicial es **99+P-U** personas y 1 persona infectada (Paciente 0).

- **a)** **(2.0 P)** Realice 10 pasos de método de Euler (h=1 dia). Realice los 2 primeros pasos detalladamente.
- **b)** **(1.0 P)** Bosqueje gráficamente la solución y explique el comportamiento de las curvas.
- **c)** **(1.0 P)** Escriba la ***function*** y el comando ***ode45*** para la solución en Matlab del problema.

Los Profesores

RCS-RGJ-HPC

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA **P.A. 2020-1**
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA **25/09/2020**
DACBHCC **13:30-15:00 h**

Solucionario
Problema 1

a)

$$P_2(x) = f(x_0)\,l_0(x) + f(x_1)\,l_1(x) + f(x_2)\,l_2(x)$$

$$f(x_0) = 1,0806 \qquad x_0 = 1$$
$$f(x_1) = 0,9072 \qquad x_1 = 1,1$$
$$f(x_2) = 0,7247 \qquad x_2 = 1,2$$

$$l_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-1,1)\,(x-1,2)}{(1-1,1)\,(1-1,2)}$$
$$l_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-1)(x-1,2)}{(1,1-1)(1,1-1,2)}$$
$$l_2 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-1)(x-1,1)}{(1,2-1)(1,2-1,1)}$$

b)

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \frac{1,0806}{0,02}(x-1,1)(x-1,2)\ \frac{0,9072}{0,01}(x-1)(x-1,2)\ \frac{0,7247}{0,02}(x-1)(x-1,1) \\ &= 54,03\cdot x^2 - 124,269\cdot x + 71,3192 \\ &\quad - 90,72\cdot x^2 + 199,584\cdot x - 108,864 \\ &\quad + 36,235\cdot x^2 - 76,0935\cdot x + 39,8585 \\ &= -0,455\cdot x^2 - 0,7785\cdot x + 2,3141 \end{aligned}$$

c) $P_2(1.05) = 0.9950$ Valor exacto $= 0.9951$
$\delta\% = 0.01\%$

Problema 2

(a)
P=7
U=5

$$\frac{mv^2}{2} = \int_0^{0,5} F dx$$

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{1(0,05)}{3}[1x0 + 4x37 + 2x71 + 104x4 + 134x2 + 161x4 + 185x2 + 207x4 + 225x2 + 239x4 + 250x1]$$

$$\frac{mv^2}{2} = 74,5333$$

m = **(10*P+U)/1000=0.075**
v=44.50

(b)
```
%Integral para datos tabulados
clc
x=[0:0.05:0.5]
y=[0 37 71 104 134 161 185 207 225 239 250]
```

```
%Método de Simpson Compuesto
N=length(x); %N es el número de puntos
h=x(2)-x(1);
yimpar=y(2:2:N-1);
ypar=y(3:2:N-2);
I=(h/3)*(y(1)+4*sum(yimpar)+2*sum(ypar)+y(N))
```

Problema 3

a) Aplicando Euler

$S_o=107$

$I_o=1$

$R_o=0$

$h=1$

$\beta=0.015$

$\gamma=1/2$

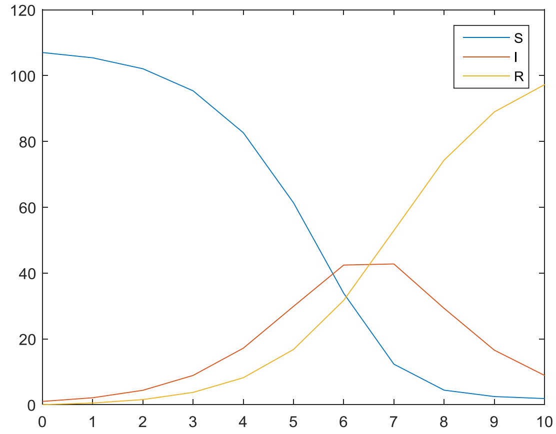
$S_{i+1}=S_i+h*(-\beta*S_i*I_i)$

$I_{i+1}=I_i+h*(\beta*S_i*I_i-\gamma*I_i)$

$R_{i+1}=R_i+h*(\gamma*I_i)$

T	S	I	R
0	107.0000	1.0000	0
1.0000	105.3950	2.1050	0.5000
2.0000	102.0672	4.3803	1.5525
3.0000	95.3608	8.8965	3.7427
4.0000	82.6351	17.1739	8.1909
5.0000	61.3476	29.8745	16.7779
6.0000	33.8566	42.4282	31.7152
7.0000	12.3095	42.7612	52.9293
8.0000	4.4139	29.2761	74.3099
9.0000	2.4756	16.5764	88.9480
10.0000	1.8600	8.9038	97.2362

b)



- La máxima cantidad de infectados se registra el dia 7 alrededor de 40 personas
- La cantidad de recuperados en el periodo 10 es casi del 90%
- La cantidad de personas susceptibles e infectados tiende a 0
- Influyes las tasas de contagio y recuperación

c)

```
% sir.m
clc
clear all
[T, Y]=ode45('fu4',[0 10],[100 1 0])
plot(T,Y(:,1),'-',T,Y(:,2),'--',T,Y(:,3),'+')
title('Solucion mediante ode45')
xlabel('T')
ylabel('Y')
legend('S','I','R')

% fu4.m
function [u_dot]=fu4(t,u)
u_dot=[-0.015*u(1)*u(2); 0.015*u(1)*u(2)-1/2*u(2); 1/2*u(2)];
```