UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA **P.A. 2019-1**
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA **17/05/2019**
DACBHCC **12:00-13:50 h**

EXAMEN PARCIAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO Y CALCULADORA**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**
- **PROHIBIDO EL USO DE CELULARES U OTROS EQUIPOS DE COMUNICACION ELECTRONICA**
- **DURACION: 110 MINUTOS**

Docentes: Garrido Rosa – Castro Robert – Pantoja Hermes – Carlos Moreno

Problema 1

Los algoritmos numéricos deben ser formulas eficientes que**,** con aceptable esfuerzo, consideren la influencia del error de redondeo. El método debe ser robusto frente a las perturbaciones (redondeos) y no cambiar dramáticamente los cálculos (mal condicionados).
Analizaremos la siguiente expresión numérica y como se propaga el error:
$y = -\frac{100}{71-50\sqrt{x}}$, donde $x = 2$.

a) **(1P)** Analice el número de cifras decimales exactos que tiene el valor de *y* en los siguientes casos: ,$\sqrt{2} \approx 1.\underline{41}$ y $\sqrt{2} \approx 1.\underline{4142}$. (con cifras decimales exactas subrayadas) ¿La fórmula está bien condicionada? Justifique adecuadamente usando la teoría de errores.
b) **(1P)** Después de un proceso de racionalización se obtiene: $y = -\frac{100(71+50\sqrt{x})}{41}$, repita el análisis del ítem a) ¿La fórmula está bien condicionada?. Justifique adecuadamente usando la teoría de errores.
c) **(1P)** Represente el número aproximado de $\sqrt{2} \approx 1.4142$ en un sistema hipotético de punto flotante basado en el prototipo de la máquina IEEE-754 que tiene las siguientes característica F(base,precisión,expo_min,expo_max) =F(2, 7, -2, 3).
Respuesta en notación de punto flotante, en notación de máquina y en notación decimal.
d) **(1P)** ¿Cuál es el epsilón de esta máquina, y que significa?
e) **(1P)** Usando un **lazo de control** con número de la vueltas igual a la precisión de la máquina (p=7) y un condicional **if …else …end** , elabore un Script en MATLAB que permita **convertir a binario un número decimal** p.e. N=0.4142. El resultado será el vector **b** que contenga los dígitos binarios.

Problema 2

Disponemos de tres lingotes de distintas aleaciones de tres metales *A*, *B* y *C*. El primer lingote contiene 20 g del metal *A*, 20 g del *B* y 60 del *C*. El segundo contiene 10 g de *A*, 40 g de B y 50 g de *C*. El tercero contiene 20 g de *A*, 40 g de *B* y 40 g de *C*. Queremos elaborar, a partir de estos lingotes, uno nuevo que contenga 15 g de *A*, 35 g de *B* y 50 g de *C*.

a) **(1P)** Plantee el problema y formule el sistema lineal.
b) **(2P)** Apli**que** el método de Eliminación Gaussiana para encontrar ¿cuántos gramos hay que coger de cada uno de los tres lingotes?
c) **(2P)** Elabore un archivo script en MATLAB que resuelva este problema usando la regla de Cramer.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA **P.A. 2019-1**
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA **17/05/2019**
DACBHCC **12:00-13:50 h**

Problema 3

Algoritmo PageRank de Google: Consideremos una pequeña web formada únicamente por 4 páginas P_1 ; P_2 ; P_3 y P_4 que se relaciona de acuerdo al grafo dirigido adjunto.

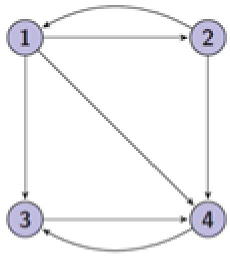

Fig 1. Web de 4 Páginas con sus respectivos enlaces.

La importancia de cada página está representada por el vector X, además sea M la matriz asociada a esta web:

$$X=\begin{pmatrix} x_1(P_1) \\ x_2(P_2) \\ x_3(P_3) \\ x_4(P_4) \end{pmatrix} \qquad M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El vector X se encuentra al resolver NX=λX; donde N se construye a partir de M, únicamente es dividir cada término de la columna i $(i = 1,2,3,4)$, por el número de unos que haya en dicha columna.

a) **(1P)** Halle la matriz N
b) **(2P)** Utilizando el método de la Potencia, aproxime el vector propio dominante después de realizar 02 iteraciones. Considere $X^{(0)} = [1\ 1\ 1 1]^T$.
c) **(1P)** Con el resultado obtenido en b), indique cuál página es el de mayor importancia.
d) **(1P)** Implemente un script en MATLAB que localice los valores propios utilizando los discos de Gershegorin,

Problema 4

Un fluido incompresible en condiciones adiabáticas fluye a través de un ducto. Al aplicar la ecuación de Bernoulli y la ecuación de los gases ideales, bajo ciertas condiciones, se tiene la siguiente relación:

$$\left(\frac{k}{k-1}\right)\left(\frac{p_1}{\gamma_1}\right)\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]=\frac{v_2^2}{2g}$$

Siendo:
k la constante del gas desconocida.
p_1=1.4x10^4 kg/m^2, presión absoluta a la entrada
p_2=1.03x10^4 kg/m^2, presión absoluta a la salida
γ_1=0.97 kg/m^3, peso específico del gas a la entrada
g=9.8 m/s^2, aceleración de la gravedad
v_2=289 m/s, velocidad del gas a la salida

a) **(1P)** Localice la raíz o raíces de la ecuación con intervalos de longitud 0.5
b) **(2P)** A partir del intervalo inicial obtenido en (a) realice iteraciones de Bisección hasta alcanzar una precisión de 0.01. Realice 2 iteraciones paso a paso.
c) **(1P)** Cuantas iteraciones se necesitan con el método de la Bisección para tener la raíz con una precisión de 10 cifras decimales exactos, partiendo de un intervalo de longitud 0.4.
d) **(1P)** Desarrolle una rutina en MATLAB para determinar los intervalos que contienen raíces entre [a, b], con n particiones iguales. Además, debe verificar si en algunos de los extremos de los intervalos existe una raíz.

Solucionario

Problema 1

a) $y = -\frac{100}{71-50\sqrt{x}}$ ➔ $\varepsilon_y = \left|-\frac{2500}{\sqrt{x}(71-50\sqrt{x})^2}\right|\varepsilon_x$

$\sqrt{2} \approx 1.41$ $\varepsilon_x = 0.5 * 10^{-2}$ y $\varepsilon_y = 35.46$ y=-200

$\sqrt{2} \approx 1.4142$ $\varepsilon_x = 0.5 * 10^{-4}$ y $\varepsilon_y = 1.051$ y=-344.8276

En ningún caso se logra cifras decimales exactas. El algoritmo está mal condicionado.

b) Racionalizando: $y = -\frac{100(71+50\sqrt{x})}{41}$ ➔ $\varepsilon_y = \left|-\frac{2500}{41\sqrt{x}}\right|\varepsilon_x$

$\sqrt{2} \approx 1.41$ $\varepsilon_x = 0.5 * 10^{-2}$ y $\varepsilon_y = 0.21 * 10^{0}$ y=-345.12195

$\sqrt{2} \approx 1.4142$ $\varepsilon_x = 0.5 * 10^{-4}$ y $\varepsilon_y = 0.21 * 10^{-2}$ y=-345.<u>63</u>41

A medida que se consideran más cifras decimales exactas se obtienen mejores resultados en la variable y, por lo que el algoritmo está bien condicionado.

c)

N=1. 4142=1.0110101=$(-1)^0$*(1.0110101)*2^0

Ei-3=0 Ei=3=011

0	011	0110101

Número de máquina más cercano:

$$\boldsymbol{N = (1 + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-5} + 2^{-7}) * 1 = 1.4141}$$

d) Epsilón =2^{-7}=0.00781, es importante porque nos informa sobre la precisión de la máquina y el error de redondeo.

e) Script en MATLAB

```
N=0.4142;
for i=1:7
    N=2*N
    if N>=1,
        N=N-1; b(i)=1;
    else
        b(i)=0;
    end
end
b
```

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA **P.A. 2019-1**
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA **17/05/2019**
DACBHCC **12:00-13:50 h**

Problema 2

a) Planteamiento del Problema.

Resumimos en una tabla los datos que nos dan:

	A	*B*	*C*	PESO TOTAL
1er L NGOTE	20 g	20 g	60 g	100 g
2º L NGOTE	10 g	40 g	50 g	100 g
3er L NGOTE	20 g	40 g	40 g	100 g

Llamamos 'x' a los gramos que tenemos que coger del primer lingote, 'y' a los del segundo lingote y 'z' a los del tercero.

Como queremos conseguir 15 g de A, 35 g de B y 50 g de C, tendremos que:

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}2x + 0{,}1y + 0{,}2z = 15 \\ 0{,}2x + 0{,}4y + 0{,}4z = 35 \\ 0{,}6x + 0{,}5y + 0{,}4z = 50 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 2x + y + 2z = 150 \\ 2x + 4y + 4z = 350 \\ 6x + 5y + 4z = 500 \end{array}$$

b) Aplicando el método de eliminación Gausiana.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 150 \\ 4 & 4 & 4 & 350 \\ 6 & 5 & 4 & 500 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{r} 1° \\ 2° - 1° \\ 3.3° - 2.2° \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 150 \\ 0 & 3 & 2 & 200 \\ 0 & 0 & -10 & -250 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{r} 1° \\ 2° \\ 3.3° - 2.2° \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 150 \\ 0 & 3 & 2 & 200 \\ 0 & 0 & -10 & -250 \end{array}\right]$$

$$2x + y + 2z = 150 \qquad x = \frac{150 - y - 2z}{2} = \frac{150 - 50 - 50}{2} = 25$$

$$3y + 2z = 200 \qquad y = \frac{200 - 2z}{3} = \frac{200 - 50}{3} = 50$$

$$-10z = -250 \qquad z = 25$$

Por tanto, habrá que coger 25 g del primer lingote,50 g del segundo y 25 g del tercero.

c) planteamiento en matlab

```
A=[2  1 2; 2 4 4; 6 5 4];
b=[150;350;500];
n=length(b);
d=det(A);
x=zeros(n,1);
for i=1:n
   Ab=[A(:,1:i-1),b,A(:,i+1:n)];
   x(i)=det(Ab)/d;
end
disp('Solución')
disp(x);
```

Problema 3

a)

$$N=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

Iteración 1:

$Y^{(1)} = N * X^{(0)} = [\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{4}{3}; \frac{11}{6}]$

$\lambda^{(1)} = \frac{11}{6}$

$X^{(1)} = \frac{Y^{(1)}}{\lambda^{(1)}} = [\frac{3}{11}; \frac{2}{11}; \frac{8}{11}; 1]$; Vector propio dominate.

Iteración 2:

$Y^{(2)} = N * X^{(1)} = [\frac{1}{11}; \frac{1}{11}; \frac{12}{11}; \frac{10}{11}]$

$\lambda^{(2)} = \frac{12}{11}$

$X^{(2)} = \frac{Y^{(2)}}{\lambda^{(2)}} = [\frac{1}{12}; \frac{1}{12}; 1; \frac{5}{6}]$; Vector propio dominate.

c) La página 3 es el de mayor importancia.

d)

```
A=[0 1/2 0 0;1/3 0 0 0;1/3 0 0 1;1/3 1/2 1 0]
n=length(A)
t=[0:0.01:2*pi]
for i=1:n
    h=A(i,i);
    r=sum(abs(A(i,:)))-abs(A(i,i));
    xx=r*cos(t)+h;
    yy=r*sin(t);
    plot(xx,yy)
    grid on
    hold on
    L(i)=-r+h;
    U(i)=r+h;
end
Linf=min(L)
Usup=max(U)
```

Problema 4

a)

$$f(k) = \left(\frac{k}{k-1}\right)\left(\frac{1.4x10^4}{0.97}\right)\left[1-\left(\frac{1.03x10^4}{1.4x10^4}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right] = \frac{287_2^2}{2x9.8}$$

La función es discontinua en k=1

k	f(k)
1.1	107.1770
1.6	-77.0041
2.1	-169.3258
2.6	-224.7755
3.1	-261.7614

Existe una raiz entre 1.1 y 1.6

b) **<u>Iteración 0</u>**

Xi=1.1 f(1.1)=107.1770
Xs=1.6 f(1.6)=-77.0041
Xr=(1.1+1.6)/2=1.35 f(1.35)=-3.2493
eXr=(Xs-Xi)/2=0.25
f(1.1)*f(1.35)<0, la raiz está en el lado izquierdo del intervalo
Xs=Xr=1.35

<u>Iteración 1</u>

Xi=1.1 f(1.1)=107.1770
Xs=1.35 f(1.35)= -3.2493
Xr=(1.1+1.35)/2=1.225 f(1.225)=45.8617
eXr=(Xs-Xi)/2=0.125
f(1.1)*f(1.225)>0, la raiz está en el lado derecho del intervalo
Xi=Xr=1.225

i	Xi	Xr	Xs	F(Xi)	F(Xr)	F(Xs)	Err
0	1.1	1.35	1.6	+	-	-	0.25
1	1.1	1.225	1.35	+	+	-	0.125
2	1.225	1.2875	1.35	+	+	-	0.0625
3	1.2875	1.3188	1.35	+	+	-	0.0313
4	1.3188	1.3344	1.35	+	+	-	0.0156
5	1.3344	1.3422	1.35	+	-	-	0.0078

La raiz aproximada es Xr=1.3422 con una precisión de 0.01.

c)

$$\frac{Xs^{(0)} - Xi^{(0)}}{2^{N+1}} < TOL$$

$$\frac{0.4}{2^{N+1}} < 0.5x10^{-10}$$

$$N > 31.89$$

Se requieren como mínimo 32 iteraciones para alcanzar la precisión deseada.

d)

```
syms x
e=x/(x-1)*1.4e4/0.97*(1-(1.03/1.4)^((x-1)/x))-289^2/(2*9.8)
a=input('Extremo izquierdo=')
b=input('Extremo derecho=')
N=input('Numero de particiones=')
xx=a:(b-a)/N:b;
yy=double(subs(e,xx))
Intervalos_Raices=[]; Raices_extremos=[];
for i=1:length(xx)-1
    if yy(i)*yy(i+1)<0
        Intervalos_Raices=[Intervalos_Raices; xx(i) xx(i+1)];
    end
    if yy(i)==0
        Raices_extremos=[Raices_extremos; xx(i) ];
    end
end
    if yy(i+1)==0
        Raices_extremos=[Raices_extremos; xx(i+1) ];
    end
disp('Intervalos que contienen raices...')
disp(Intervalos_Raices)
disp('Raices en extremos de intervalos...')
disp(Raices_extremos)
```