UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA **P.A. 2018-3**
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA **01/02/2019**
DACBHCC **17:00-18:50 h**

EXAMEN PARCIAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO Y CALCULADORA**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**
- **PROHIBIDO EL USO DE CELULARES U OTROS EQUIPOS DE COMUNICACION ELECTRONICA**
- **DURACION: 110 MINUTOS**

Problema 1

La deflexión "y" de la punta de un mástil en un bote de vela es: $y = \frac{FL^4}{8EI}$. Donde F es una carga lateral uniforme de 500 N/m ± 1%, L es la altura de 10±0.01 m, E es el módulo de elasticidad de 10^{10} N/m^2±0.5%, I es el momento de inercia de la sección circular del mástil siendo $I=\pi R^4/4$; siendo $\pi=3.142$ aproximado a 3 cifras decimales exactos y el radio del mástil $0.15 \leq R \leq 0.151$ m.

(a) **(3.0 P)** Aproxime la deflexión del mástil así como su error absoluto y relativo.

(b) **(2.0 P)** Muestre el valor de la deflexión del mástil "y" truncado a 2 decimales, e indicar su representación en el sistema de 32 bits de simple precisión según la norma IEEE-754 y a qué número decimal de máquina se aproxima al ser almacenado.

Problema 2

Un sistema de tres masas suspendidas verticalmente por una serie de resortes se muestra en la siguiente Figura. En un instante inicial el sistema está sujeto y luego se suelta empezando a moverse por acción del peso de cada masa. Necesitamos determinar el valor de los desplazamientos en el estado estacionario (cuando el sistema no se mueve).

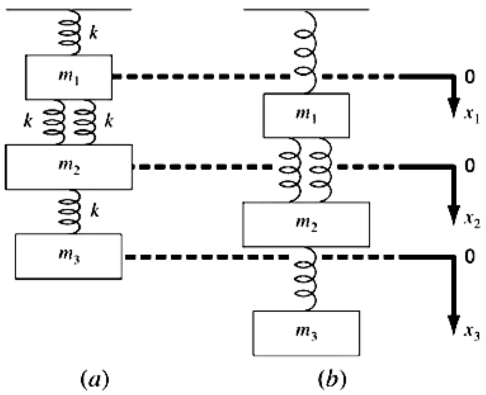


Fig 1 (a) Sistema en su posición inicial (b) Sistema desplazado por el peso de cada masa

(a) **(1 P)** Demuestre usando la ley de Newton que la dinámica del sistema está dado por:

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = 2k(x_2 - x_1) + m_1 g - kx_1$$
$$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = k(x_3 - x_2) + m_2 g - 2k(x_2 - x_1)$$
$$m_3 \frac{d^2x_3}{dt^2} = m_3 g - k(x_3 - x_2)$$

Parámetros del sistema:

$m_1 = 3\,kg,\ m_2 = 4\,kg,\ m_3 = 5\,kg\,, k = 15\frac{Kg}{s^2}\,, g = 10\ \frac{m}{s^2}$

Determine el sistema lineal K x=W, donde K es la matriz de Rigidez, W la matriz de pesos, x es el vector desplazamientos.

(b) **(1 P)** ¿Es el sistema lineal consistente? ¿Tiene solución única? Justifique sin resolver el sistema lineal.

(c) **(1.5 P)** Obtener de Factorización de Doolite de la matriz K.

(d) **(1.5 P)** Resolver los sistemas triangulares para obtener el vector de desplazamientos.

Problema 3

Sea el sistema lineal:

$$\begin{bmatrix} k & 1 \\ 3 & 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{6} \end{bmatrix}$$

a) **(1.0 P)** Para qué valores de k el sistema es absurdo y para que valores es indeterminado?
b) **(1.5 P)** Para qué valores de k el sistema converge para Gauss-Seidel a pesar de no tener la diagonal estrictamente dominante?
c) **(1.5 P)** Aplique Gauss-Seidel hasta alcanzar una tolerancia de 0.001, con k=5, partiendo de un vector inicial nulo y muestre el error en cada paso.
d) **(1.0 P)** Escriba un programa en MATLAB que imprima todos los valores de k (tal que k=-10:0.1:10) para los cual hay convergencia de Gauss-Seidel.

Problema 4

En ingeniería oceanográfica, la ecuación de una ola estacionaria reflejada en un puerto está dada por: $h = h_0 \left[sen\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) cos\left(\frac{2\pi t v}{\lambda}\right) + e^{-x} \right]$

Siendo ***$h=0.5h_0$*, *$v=48$*, *$t=12$*, *$\lambda=16$*.** Se desea determinar ***x***.

(a) **(1 P)** Localice las raíces entre 0 y 20 con intervalos de longitud 4.
(b) **(1.5 P)** Estime menor raíz, utilizando 3 **iteraciones** del método de Bisección a partir del rango encontrado en a)
(c) **(1.5 P)** A partir de la última aproximación obtenida en b) realice 02 iteraciones de Newton-Raphson y estime el error.
(d) **(1 P)** Desarrolle una rutina en MATLAB que permita encontrar la solución mediante el algoritmo Newton-Raphson hasta tener una precisión de 10 cifras decimales exactos.

Ing. Robert Castro S.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA **P.A. 2018-3**
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA **01/02/2019**
DACBHCC **17:00-18:50 h**

Solucionario

Problema 1

a)

$$y = \frac{FL^4}{2E\pi R^4} \quad = 0.1551$$

$$\frac{\partial y}{\partial F} = 3.1018x10^{-4} \qquad \varepsilon_F = 5$$

$$\frac{\partial y}{\partial L} = 0.0620 \qquad \varepsilon_L = 0.01$$

$$\frac{\partial y}{\partial E} = -1.5509x\,10^{-11} \qquad \varepsilon_E = 5x\,10^{7}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \pi} = -0.0494 \qquad \varepsilon_\pi = 5x\,10^{-4}$$

$$\frac{\partial y}{\partial R} = -4.1220 \qquad \varepsilon_R = 5x\,10^{-4}$$

$$\varepsilon_y = \left|\frac{\partial y}{\partial F}\right|\varepsilon_F + \left|\frac{\partial y}{\partial L}\right|\varepsilon_L + \left|\frac{\partial y}{\partial E}\right|\varepsilon_E + \left|\frac{\partial y}{\partial \pi}\right|\varepsilon_\pi + \left|\frac{\partial y}{\partial R}\right|\varepsilon_R = 0.0050$$

$$y - \varepsilon_y \le Y \le y + \varepsilon_y$$

$$0.1501 \le Y \le 0.1601$$

$$\delta = \frac{\varepsilon_y}{|y|}=0.0321=3.21\%$$

b)

0.15=0.00100110011001100110011001=0.149999991059

Normalizando

x=(-1)^(0)*1.00110011001100110011001x10^{-3}

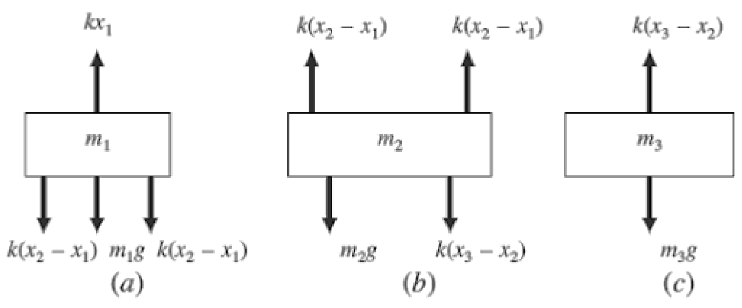
Ei-127=-3 Ei=124=01111100

0	**01111100**	**00110011001100110011001**

Problema 2

a)

Diagramas del cuerpo Libre para las tres masas



Aplicando la ley de Newton : $m_i\ddot{x}_i = \sum \ f_i$, considerando las fuerzas que contribuyen al movimiento (+), hacia abajo y las fuerzas en contra del movimiento (-), hacia arriba

En la masa m_1: $m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = 2k(x_2 - x_1) + m_1g - kx_1$

En la masa m_2: $m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} = k(x_3 - x_2) + m_2g - 2k(x_2 - x_1)$

En la masa m_3: $m_3\frac{d^2x_3}{dt^2} = m_3g - k(x_3 - x_2)$

En el estado estacionario (dejan de oscilar las masas)

$$2k(x_1 - x_2) + kx_1 = m_1 g$$
$$k(x_2 - x_3) + 2k(x_2 - x_1) = m_2 g$$
$$k(x_3 - x_2) = m_3 g$$

Formando el sistema Lineal:

$$\begin{bmatrix} 3k & -2k & 0 \\ -2k & 3k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 g \\ m_2 g \\ m_3 g \end{bmatrix}$$

Como $k = 15$

$$\begin{bmatrix} 45 & -30 & 0 \\ -30 & 45 & -15 \\ 0 & -15 & 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \\ 50 \end{bmatrix}$$

b)

Se comprueba que el rango([K|W])=rango([K])=3 por lo que es consistente y de única solución.

Solución alternativa: como el det(K)≠0, se puede afirmar que el sistema es consistente y de única solución.

c)

Factorización de Doolite:

L=$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & 1 \end{bmatrix}$ U= $\begin{bmatrix} 45 & -30 & 0 \\ 0 & 25 & -15 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

d)

Resolviendo los 2 sistemas triangulares:

Lz=b $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \\ 50 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 60 \\ 86 \end{bmatrix}$

Ux=z $\begin{bmatrix} 45 & -30 & 0 \\ 0 & 25 & -15 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 60 \\ 86 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \\ 43/3 \end{bmatrix}$

Problema 3

a)

det(A)=$2k^2$-3

$k \neq \sqrt{\frac{3}{2}}$ Solución Única

$k = \sqrt{\frac{3}{2}}$ Solución Indeterminada

$k = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ Solución Absurda

b)

Para el criterio del radio espectral:

$$Tg = (D - L)^{-1} * U = \begin{bmatrix} 0 & -1/k \\ 0 & 3/2k^2 \end{bmatrix}$$

$$\rho(Tg) = \left|\frac{3}{2k^2}\right| < 1$$

$$k > \sqrt{3/2} \quad o \quad k < -\sqrt{3/2}$$

Para el criterio de la diagonal estrictamente dominante:

$$k > 3/2 \quad o \quad k < -3/2$$

Valor para los cuales hay convergencia a pesar de no tener diagonal estrictamente dominante:

$$k \in [-\frac{3}{2}, -\sqrt{3/2} > \cup < \sqrt{3/2}, \frac{3}{2}]$$

c)

k=5

$$x^{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & -0.2 \\ 0 & 0.06 \end{bmatrix} x^k + \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1849 \end{bmatrix}$$

TOL=10^{-3}

X1	**x2**	**Err**
0	0	-----
0.2000	0.1849	0.2000
0.1630	0.1960	0.0370
0.1608	0.1967	0.0022
0.1607	0.1968	0.0001

d)

```
acuk=[ ];
for k=[-10:0.1:-0.1,0.1:0.1:10]
   A=[k 1;3 2*k];
   D=diag(diag(A));
   L=D-tril(A);
   U=D-triu(A);
   Tj=inv(D)*(L+U);
   rhoj=max(abs(eig(Tj)));
   if rhoj<1
      acuk=[acuk k];
   end
end
disp(acuk')
```

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA
DACBHCC

P.A. 2018-3
01/02/2019
17:00-18:50 h

Problema 4

a)

$$f(x) = sen\left(\frac{\pi x}{8}\right) + e^{-x} - 0.5$$

Las raíces se encuentran entre [4, 8] y [16, 20]

b)

Bisección

Xi	Xr	Xs	Err
4	6	8	2
6	7	8	1
6	6.5	7	0.5

c)

$$f'(x) = \frac{\pi}{8}cos\left(\frac{\pi x}{8}\right) - e^{-x}$$

$$x_0 = 6.5$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$Err = |x_{n+1} - x_n|$$

```
x0 =   6.500000000000000
x1 =   6.673994068468029   err1 = 0.173994068468029
x2 =   6.670394685230912   err2 = 0.003599383237117
```

d)

```
s='sin(pi*x/8)+exp(-x)-0.5'
ds='pi/8*cos(pi*x/8)-exp(-x)'
f=inline(s), df=inline(ds)
x0=6.5,TOL=0.5e-10
   for i=1:10
    x1=x0-f(x0)/df(x0)
    err=abs(x1-x0)
    x0=x1
    if err<TOL
        break
    end
end
```