# EXAMEN FINAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO Y CALCULADORA**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**
- **PROHIBIDO EL USO DE CELULARES U OTROS EQUIPOS DE COMUNICACION ELECTRONICA**
- **DURACION: 110 MINUTOS**

## Problema 1

Si consideramos los siguientes datos para el nitrógeno ($N_2$)

| | | | |
|---|---|---|---|
| T(K) | 300 | 400 | 500 |
| B(cm3/mol) | -4.2 | 9.0 | 16.9 |

donde T es la temperatura y B es el segundo coeficiente virial.

a) (**1.5P**) Calcule el polinomio de interpolación por el método de las diferencias divididas.
b) (**1P**) ¿Cuál es el segundo coeficiente virial a la temperatura 450 K?.
c) (**1P**) Halle el error al aproximar el segundo coeficiente virial para T = 350 K utilizando un polinomio de primer grado.
d) (**1.5P**) Implemente un script en MATLAB que calcule la tabla de las diferencias divididas

## Problema 2

Se desarrolla en un automóvil, un sistema electrónico de control. Su objetivo es, mostrar el consumo de combustible en la pantalla multifunción. Para este propósito, se tiene acceso a los datos a partir del medidor de flujo de masa de aire, $\dot{m}_{aire}(t)$, y la relación aire-combustible , $\lambda$ (t) en la unidad de control del motor.

Así se tiene, $\lambda_0$ = 1/14.7, es la relación entre el flujo de masa instantánea de combustible y aire en las condiciones estequiométricas.

La cantidad de combustible consumido es calculado como:

$$m_{gasolina} = \int_0^t \dot{m}_{aire}(t)\,\frac{\lambda_0}{\lambda(t)}\mathrm{dt}$$

Se midieron los siguientes datos en la unidad de control del automóvil:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| t | miliseg (ms) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $\lambda$ | | 0.9859 | 0.9267 | 0.9002 | 0.9182 | 0.9726 | 1.0393 |
| $\dot{m}_{aire}$ | miligramos/ms | 2.78 | 2.88 | 2.6068 | 2.98 | 2.6068 | 2.88 |

a) **(2P)** Calcule la cantidad de combustible consumido $m_{gasolina}$ , después de 5 milisegundos con la regla trapezoidal compuesta.¿ Cuál sería el consumo de gasolina expresada en galones por hora para el tiempo indicado?
Densidad de la gasolina =0.68 gr/cc.
1 galón= 3.78541litros

**Profesores: Rosa Garrido, Robert Castro, Hermes Pantoja, Máximo Obregón.**

b) **(2P)** Calcule la cantidad de combustible consumido $m_{combustible}$ , después de 3 milisegundos usando Simpson 3/8.

c) **(1P)** Aplique un programa en MATLAB que permita resolver la cantidad de combustible usando los comandos del MATLAB y realice lo siguiente:
- Con los datos medidos interpole entre el tiempo de [0 5] milisegundos con espaciamiento dt=0.05, la función del integrando usando spline.
- Integre los datos suavizados usando trapecio compuesto.
- Realice la conversión de unidades para obtener el combustible consumido en galones/hr.

**Problema 3**

Se calienta una sustancia liquida dentro de un cilindro, hasta una temperatura de 90°C y luego se deja enfriar al medio ambiente el cual se encuentra a 14°C, considerando tiempo en minutos, la constante de enfriamiento es -0.1. Además, según Newton, la rapidez con que se enfría un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio que le rodea.

a) **(1P)** Plantee la ecuación diferencial entre la temperatura en °C y el tiempo en min.

b) **(2P)** Estime la temperatura después de 10 minutos, usando el método de Euler progresivo con 2 iteraciones.

c) **(1P)** Calcule analíticamente la temperatura exacta del ítem (b).

d) **(1P)** Mediante un script en MATLAB, estime el error obtenido en el ítem (b) si fuera en 10 iteraciones.

**Problema 4**

Un móvil se desplaza a lo largo del eje “x” y su movimiento obedece a la siguiente ecuación diferencial ordinaria de segundo orden:

$$tx'' - x' = 3t^2$$

Se sabe que en el instante inicial el móvil se encuentra en x = 1 m. y al cabo de 1 segundo se encuentra en la posición x = 2 m.

a) **(2.5P)** Determine la ubicación de la partícula $x$(t) mediante diferencias finitas (h=0.25) para t=0.25, t=0.5 y t=0.75.

b) **(1P)** Calcule el error relativo porcentual para cada punto obtenido en (a), si la solución exacta es de la forma: $x = t^3 + \frac{1}{2}C_1t^2 + C_2$

c) **(1P)** Halle la velocidad y aceleración en t = 0.5, a partir de los valores obtenidos en (a) usando fórmulas de diferenciación numérica central y evalúe el error relativo porcentual.

d) **(0.5P)** Comente los resultados obtenidos en b) y c).

**Profesores: Rosa Garrido, Robert Castro, Hermes Pantoja, Máximo Obregón.**

**Solucionario**

**Solución P1**

a) Hallando la Tabla de las Diferencias Divididas

| T(K) | B(cm3/mol) | F[,] | F[,,] |
|---|---|---|---|
| 300 | -4.2 | 0.132 | -0.0003 |
| 400 | 9.0 | 0.079 | |
| 500 | 16.9 | | |

$$p(x) = -0.0003x^2 + 0.3175x - 75.6$$

b) $p(450) = -0.0003450^2 + 0.3175 \times 450 - 75.6 = 13.6125\ (\mathrm{cm}^3/\mathrm{mol})$

c) Error para T= 350 K

$$e_1(350) = -0.0003 \times (350 - 300)(350 - 400) = 0.75$$

d)

```
x=[300 400 500]
y=[-4.2 9 16.9]
n=length(x);
D=zeros(n);
D(:,1)=y';
for j=2:n
for i=1:n-j+1
D(i,j)=(D(i,j-1)-D(i+1,j-1))/(x(i)-x(i+j-1));
end
end
disp('Tabla de la diferencia dividida:')
D
```

**Solución P2**

a) $\mathrm{m_{gasolina}} = \int_0^{5\mathrm{ms}} \dot{\mathrm{m}}_{\mathrm{aire}}(\mathrm{t}) \frac{\lambda_0}{\lambda(\mathrm{t})} \mathrm{dt}$

$$I = \Delta t \left[\frac{1}{2}\dot{\mathrm{m}}_{\mathrm{aire}}(0)\frac{\lambda_0}{\lambda(0)} + \dot{\mathrm{m}}_{\mathrm{aire}}(1)\frac{\lambda_0}{\lambda(1)} + \dot{\mathrm{m}}_{\mathrm{aire}}(2)\frac{\lambda_0}{\lambda(2)} + \dot{\mathrm{m}}_{\mathrm{aire}}(3)\frac{\lambda_0}{\lambda(3)} + \dot{\mathrm{m}}_{\mathrm{aire}}(4)\frac{\lambda_0}{\lambda(4)} + \frac{1}{2}\dot{\mathrm{m}}_{\mathrm{aire}}(5)\frac{\lambda_0}{\lambda(5)}\right]$$

$$I = 1\mathrm{ms}.\frac{1}{14.7}\left[\frac{1}{2}.\frac{2.78}{0.9859} + \frac{2.88}{0.9267} + \frac{2.6068}{0.9002} + \frac{2.98}{0.9182} + \frac{2.6068}{0.9726} + \frac{1}{2}.\frac{2.88}{1.0393}\right]\frac{mg}{ms}$$

$$I = 1.00168\mathrm{mg}$$

$$\frac{1.00168mg}{5\ ms} * \frac{3600{*}10^3 ms}{1hr} * \frac{1Kg}{10^6 mg} = 0.7212\ \frac{Kg}{hr}$$

$$0.7212\ \frac{Kg}{hr} * \frac{cc}{0.68gr} * \frac{1\ galon}{3{,}78541{*}10^3 cc} * \frac{10^3 gr}{1Kg} = 0.28\ \frac{galones}{hr}$$

**Profesores: Rosa Garrido, Robert Castro, Hermes Pantoja, Máximo Obregón.**

b)

$$Q_{3/8} = 3\text{ms}.\frac{1}{14.7}\left[\frac{2.78}{0.9859}.\frac{1}{8}+\frac{2.88}{0.9267}.\frac{3}{8}+\frac{2.6068}{0.9002}.\frac{3}{8}+\frac{2.98}{0.9182}.\frac{1}{8}\right]\frac{mg}{ms}$$

$$Q_{3/8} = 0.614185mg$$

c)

```
t=[0    1   2   3   4   5]
L=[0.9859   0.9267  0.9002  0.9182  0.9726  1.0393]
maire=[2.78 2.88    2.6068  2.98    2.6068  2.88]
f=maire./L
tt=linspace(0,5);
fs=spline(t,f/14.7,tt);
I=trapz(tt,fs);
M_gasolina=I/5*3.6/(0.68*3.78541)
```

## Solución P3

a) La ecuación diferencial será:

$$\frac{dT}{dt} = K(T - Ta) \Rightarrow \frac{dT}{dt} = -0.1(T - 14) = 1.4 - 0.1T$$

b) t0=0 T0=90 tf=10 min Tf=?

2 iteraciones ➔ h=1 min

Aplicando la fórmula de Euler $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$

T(5min)=52 °C

T(10min)=33 °C

c) $\frac{dT}{dt} = 1.4 - 0.1T$

$10T' = 14 - T$

Haciendo:

$$T = Ce^{-\frac{t}{10}} + 14$$

Reemplaza para t=0 T=90 ➔C=76

Por lo tanto:

$$T = 76e^{-\frac{t}{10}} + 14$$

Por lo tanto T(10min)=41.959 °C

d)

```
x0=0;y0=90;xf=10; h=5;
f=inline('1.4-0.1*y','x','y')
fs=inline(dsolve('Dy=1.4-0.1*y','y(0)=90','x'))
X=(x0:h:xf)';
y=y0;Y=y0;
for x=x0:h:(xf-h)
    y=y+h*f(x,y);
end
fprintf('Error=%.2f',abs(y-fs(10)))
```

**Solución P4**

a) Planteando las ecuaciones en diferencias finitas:

$$t_1\left(\frac{x_2-2x_1+x_0}{h^2}\right)-\left(\frac{x_2-x_0}{2h}\right)=3t_1^2$$

$$t_2\left(\frac{x_3-2x_2+x_1}{h^2}\right)-\left(\frac{x_3-x_1}{2h}\right)=3t_2^2$$

$$t_3\left(\frac{x_4-2x_3+x_2}{h^2}\right)-\left(\frac{x_4-x_2}{2h}\right)=3t_3^2$$

Reemplazando: $t_1$=0.25, $t_2$=0.5, $t_3$=0.75, $x_0$=1, $x_4$=2, y resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$x_1=1.0039$$
$$x_2=1.1094$$
$$x_3=1.4102$$

b) Reemplazando las condiciones de frontera, obtenemos la solución exacta:

$$x=t^3+1$$

$$\widetilde{x_1}=1.0156\ (\delta_1=1.1538\%)$$

$$\widetilde{x_2}=1.1250\ (\delta_2=1.3889\%)$$

$$\widetilde{x_3}=1.4219\ (\delta_3=0.8242\%)$$

c) Usando fórmulas de diferenciación numérica:

$$v(0.5)=\left(\frac{x_3-x_1}{2h}\right)=0.8125$$

$$a(0.5)=\left(\frac{x_3-2x_2+x_1}{h^2}\right)=3.125$$

Cálculo de los valores exactos y errores:

$$\tilde{v}(0.5)=3(0.5)^2=0.75\ (\delta_v=8.3333\%)$$
$$\tilde{a}(0.5)=6(0.5)=3\ (\delta_a=4.1667\%)$$

d) Los resultados de b) son aceptables. Los resultados de c) no son tan buenos debido a que h es grande.