UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA **P.A. 2017-1**
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA **19/05/2017**
DACBHCC

EXAMEN PARCIAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO Y CALCULADORA**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**
- **PROHIBIDO EL USO DE CELULARES U OTROS EQUIPOS DE COMUNICACION ELECTRONICA**
- **DURACION: 110 MINUTOS**

Problema 1

Para determinar el área de un trapecio, se dispone de los siguientes datos: a = base mayor (12.12 ± 0,01) cm, b = base menor (7.53 ± 0,01) cm, y h = altura (4.72 ± 0,01) cm. Se pide:

a) **(2.0 P)** Determine el máximo error del área en cm y el correspondiente error relativo en porcentaje.
b) **(2.0 P)** El rango mínimo y máximo del área del trapecio. ¿Cuántas y cuáles cifras significativas considera exactas del área?
c) **(1.0 P)** Si se dispone de un sistema en punto flotante:
F(base, precisión, exp_{min}, exp_{max}) = F(2,4,-6,7), **¿con cuántas cifras significativas se representaría el cálculo del Área** en este sistema?. Debe primero determinar su representación en punto flotante y en forma de máquina (notación interna). Después colocar en forma decimal.
Nota.- $exp_{max}=2^{k-1}-1$, siendo *k*=bits del exponente.

Problema 2

Una compañía de inversiones ofrece tres portafolios de acciones: A, B y C. El número de bloques de cada tipo de acciones en cada uno de estos portafolios se resume en la siguiente tabla:

		Portafolio A	B	C
Riesgo	Alto	6	1	3
	Moderado	3	2	3
	Bajo	1	5	3

Un cliente quiere 35 bloques de acciones de alto riesgo, 22 bloques de riesgo moderado y 18 bloques de acciones de bajo riesgo.

a) **(1.0 P)** Modele el sistema de ecuaciones en su forma algebraica. Indicando las variables.
b) **(1.0 P)** Verifique que el sistema de ecuaciones tiene solución única.
c) **(3.0 P)** Utilizando eliminación Gaussiana ¿Cuántos bloques de acciones de cada portafolio deben sugerirse? indicando todos los resultados parciales.

Problema 3

3 Grifos han llenado el tanque 1 de 50 m^3, el grifo 1 por 10 horas, el grifo 2 por 1 hora y el grifo 3 por 2 horas, luego llenan el tanque 2 de 30 m^3, el grifo 1 por 1 hora, el grifo 2 por 8 horas y el grifo 3 por 1 hora. Finalmente llenan el tanque 3 de 60m^3, el grifo 1 por 1 hora, el grifo 2 por 2 horas y el grifo 3 por 10 horas. ¿Cuántos litros vierte por hora cada grifo?

a) **(1.0 P)** Plantee matricialmente el sistema de ecuaciones y verifique si tiene solución única.
b) **(1.0 P)** Verifique si el sistema planteado converge para los métodos iterativos.
c) **(3.0 P)** Resuelva el sistema de ecuaciones por el método iterativo de Jacobi, en 3 iteraciones y su error respectivo, utilizando el criterio de norma infinita y considerando el vector nulo para las incógnitas como valor de partida.

Problema 4

Una tubería lisa de 50 mm de diámetro interno (D) y 240 m de longitud (L) transporta agua (densidad ρ=1000 kg/m^3). Las pérdidas expresadas en metros (h_L) en la tubería se pueden calcular mediante la ecuación de Darcy: $h_L = f\,\frac{L}{D}\left(\frac{v^2}{2g}\right)$

Siendo ***v*** la velocidad del fluido en m/s. El caudal es de 0.01 m^3/s, Siendo g=9.81 m/s^2. El número adimensional de Reynolds (R) se obtiene así: $R = \frac{\rho\, v\, D}{\mu}$.

Siendo μ=10^{-4} Pascal-Seg, la viscosidad absoluta del agua.

El factor de fricción que también es adimensional **(*f*)** se puede calcular a partir de la ecuación de Prandtl, para flujo turbulento en una tubería lisa: $\frac{1}{\sqrt{f}} = 2\,Log_{10}\left(R\sqrt{f}\right) - 0.8$

a) **(2.0 P)** Escriba la ecuación no lineal correspondiente y aplique 7 iteraciones de Bisección, partiendo de un intervalo de longitud 0.1, que contenga a la raíz buscada.
b) **(0.5 P)** Aproxime las pérdidas en la tubería h_L, a partir de lo obtenido en a)
c) **(1.0 P)** Sin hacer iteraciones de bisección determine el mínimo número de iteraciones necesarias para tener 14 cifras decimales exactas partiendo del intervalo dado en a)
d) **(1.5 P)** Escriba un programa MATLAB que aplique 3 iteraciones del método del Newton-Raphson a partir de la aproximación obtenida en a) y estime el error.

Los Profesores

Solucionario

Problema 1

a) a = 12.12
b = 7.53
h = 4.72

$A = \frac{h}{2}(a+b) \approx 46.3740$
$\varepsilon_a = \varepsilon_b = \varepsilon_h = 0.01$
Propagación de errores
$\varepsilon_A = |\frac{\partial A}{\partial h}|\varepsilon_h + |\frac{\partial A}{\partial a}|\varepsilon_a + |\frac{\partial A}{\partial b}|\varepsilon_b$

$\varepsilon_A = |\frac{(b+a)}{2}|\varepsilon_h + |\frac{h}{2}|\varepsilon_a + |\frac{h}{2}|\varepsilon_b = 0.1455 \ \ cm$

$\delta_A * 100 = \frac{\varepsilon_A}{|A|} * 100 = 0.31\%$

b) Rango: $\mathbf{46}.2285 \leq A \leq \mathbf{46}.5194$ tiene dos cifras significativas exactas y son 4 y 6

c) F(2,4,-6 ,7)

bits del exponente = 4

Notación en punto flotante: $+(1.\underline{\mathbf{0111}}0010111..) * 2^{101=\overbrace{1100}^{12}-\underbrace{0111}_{7}}$

Notación de Máquina: $0|\overline{\underline{1100\ |0111}}$
Notación decimal: 46

Problema 2

a)

Forma algebraica:

$$\begin{aligned} 6x_1 + \quad x_2 + \quad 3x_3 &= 35 \\ 3x_1 + \quad 2x_2 + \quad 3x_3 &= 22 \\ x_1 + \quad 5x_2 + \quad 3x_3 &= 18 \end{aligned}$$

x_1 : El número de bloques de portafolio de acción A .
x_2 : El número de bloques de portafolio de acción B .
x_3 : El número de bloques de portafolio de acción C .

b)

Las matrices a analizar.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Matriz Ampliada:

$$Aa = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 & 35 \\ 3 & 2 & 3 & 22 \\ 1 & 5 & 3 & 18 \end{pmatrix}$$

Rang(A)=Rang(Aa)=3
Solución única

c)

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 & 35 \\ 3 & 2 & 3 & 22 \\ 1 & 5 & 3 & 18 \end{pmatrix} \underset{\longrightarrow}{f_1 \leftrightarrow f_3} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 18 \\ 3 & 2 & 3 & 22 \\ 6 & 1 & 3 & 35 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\rightarrow}{f_2 - f_1} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 18 \\ 0 & -13 & -6 & -32 \\ 6 & 1 & 3 & 35 \end{pmatrix} \underset{\rightarrow}{f_3 - f_1} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 18 \\ 0 & -13 & -6 & -32 \\ 0 & -29 & -15 & -73 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\rightarrow}{f_3 - \frac{29}{13} f_2} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 18 \\ 0 & -13 & -6 & -32 \\ 0 & 0 & -\frac{21}{13} & -\frac{21}{13} \end{pmatrix}$$

Sustitución regresiva:

$$x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 18$$

$$0x_1 - 13x_2 - 6x_3 = -32$$

$$0x_1 + 0x_2 - \frac{21}{13}x_3 = -\frac{21}{13}$$

$$\text{Luego: } x_3 = 1; \longrightarrow x_2 = 2; \longrightarrow x_1 = 5$$

Se debe sugerir: 5 bloques de acciones de tipo A, 2 bloques de acciones de tipo B, 1 bloque de acciones de tipo C.

Problema 3

a)

$$A := \begin{bmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 1 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 10 \end{bmatrix} \qquad b := \begin{bmatrix} 50 \\ 30 \\ 60 \end{bmatrix}$$

Se verifica que el rango de la matriz A y Ab es 3
por lo tanto tiene solución unica.

b) Se verifica que la matriz A es diagonal estrictamente
dominante por lo tanto converge para los métodos iterativos.

c)

$$D := \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \qquad L := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad U := \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T := D^{-1} \cdot (L+U) = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 & -0.2 \\ -0.125 & 0 & -0.125 \\ -0.1 & -0.2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c := D^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} 5 \\ 3.75 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$x0 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x1 := T \cdot x0 + c = \begin{bmatrix} 5 \\ 3.75 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$x2 := T \cdot x1 + c = \begin{bmatrix} 3.425 \\ 2.375 \\ 4.75 \end{bmatrix}$$

$$x3 := T \cdot x2 + c = \begin{bmatrix} 3.813 \\ 2.728 \\ 5.183 \end{bmatrix} \qquad error := \left\| x3 - x2 \right\| = 0.433$$

Problema 4

a)

$$v = \frac{q}{A} = \frac{0.01}{\pi(0.05)^2/4} = 5.0930\ m/s$$

$$R = \frac{1000x5.0930x0.05}{10^{-4}} = 2.5465x10^6$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2\ Log_{10}\left(2.5465x10^6\sqrt{f}\right) - 0.8$$

F(0.005)= +
F(0.105)= -
Existe una raíz entre [0.005, 0.105]
Aplicando bisección:

a	c	b	err
0.005	0.55	0.105	0.05
0.005	0.03	0.055	0.025
0.005	0.0175	0.030	0.0125
0.005	0.001125	0.0175	0.00625
0.005	0.008125	0.01125	0.003125
0.008125	0.0096875	0.01125	0.0015625
0.0096875	0.01047	0.01125	0.00078125

b)

$$h_L = 0.01047\left(\frac{240}{0.05}\right)\left(\frac{5.0930^2}{2x9.81}\right) = 66.441\ m$$

c)

$$\frac{b-a}{2^n} < TOL$$

$$\frac{0.1}{2^n} < 0.5x10^{-14}$$

$$n = 45$$

d)

```
syms x
f=1/sqrt(x)-2*log10(2.5465e6*sqrt(x))+0.8
df=diff(f)
x0=0.0984375
x1=x0-subs(f,x0)/subs(df,x0)
err1=abs(x1-x0)
x2=x1-subs(f,x1)/subs(df,x1)
err2=abs(x2-x1)
x3=x2-subs(f,x2)/subs(df,x2)
err3=abs(x3-x2)
```