UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA **P.A. 2016-3**
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA **27/01/2017**
DACBHCC

EXAMEN PARCIAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO Y CALCULADORA**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**
- **PROHIBIDO EL USO DE CELULARES U OTROS EQUIPOS DE COMUNICACION ELECTRONICA**
- **DURACION: 110 MINUTOS**

Problema 1

La ecuación de estado de Peng-Robinson proporciona la presión P en Pascales de un gas mediante:

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V(V+b)+b(V-b)}$$

Donde a y b son constantes, T es la temperatura absoluta a la que se encuentra el gas, V es el volumen específico y R es la constante de los gases perfectos (8.31441 J/(mol-K)). Para el CO_2 las constantes a y b toman los valores a = 364.61 y b = 0.02664. Supongamos que se desea encontrar la presión del CO_2 a una temperatura de 340 K y un volumen especifico de 0.168 m^3/mol: Si R y V fueron medidos con una precisión de 1%, a y b tienen 2 cifras decimales exactas y T tiene un error de 0.05 K.

a) **(2.5 P)** Estime P, así como su error absoluto y relativo
b) **(2.5 P)** Trunque P a 2 decimales y muestre cuál es su representación en un sistema de simple precisión en 32 bits según la norma IEEE-754. Con que error se almacena?

Problema 2

Un ingeniero Mecánico-Electricista desea calcular el ángulo de carga de un generador (es decir el ángulo formado entre la tensión en bornes V y la fuerza electromotriz E), de una Central Hidroeléctrica, llegando al final a la siguiente ecuación no lineal:

$$C_1 = 1.34$$
$$C_2 = 0.11$$
$$\frac{2}{3} = C_1\, \delta\, sen(\delta) + C_2 sen(2\,\delta)$$

a) **(1.0 P)** Localice todas la raíces comprendidas en el intervalo (–π, π) con intervalos de longitud π/6
b) **(1.0 P)** Realice 02 iteraciones de bisección paso a paso a partir de a) para la raíz más positiva más cercana a 0.
c) **(2.0 P)** A partir de la respuesta obtenida en b) realice iteraciones de Newton-Raphson hasta tener una precisión de 10^{-6}. Realice la primera iteración paso a paso.
d) **(1.0 P)** Escriba un código **MATLAB** para realizar 5 iteraciones de punto fijo para la ecuación planteada y muestre su error de sucesión y un mensaje si habrá o no convergencia.

Problema 3

Sea el sistema lineal:

$$\begin{bmatrix} k & 2 \\ 2 & 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} \\ 4 \end{bmatrix}$$

a) **(1.0 P)** Para qué valores de k el sistema es absurdo
b) **(1.5 P)** Para qué valores de k el sistema converge para Gauss-Seidel de acuerdo al criterio del radio espectral
c) **(1.5 P)** Aplique Gauss-Seidel con una tolerancia de 0.0001, con k=4, partiendo de un vector inicial nulo y muestre el error en cada paso.
d) **(1.0 P)** Escriba un programa en MATLAB que imprima todos los valores de k (tal que k=-10:0.1:10) para los cual hay convergencia de Jacobi. Debe evaluar para cada valor de k el radio espectral.

Problema 4

Sea el sistema lineal:

$$\begin{bmatrix} a^2 & -a^2 & a \\ -a^2 & 5a^2 & -2a^2 - a \\ a & -2a^2 - a & 10a^2 + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a^2 + a \\ -8a^2 - a \\ 12a^2 + 2a + 1 \end{bmatrix}$$

a) **(1.0 P)** Para qué valores de ***a*** es posible aplicar Cholessky
b) **(2.0 P)** Obtener la factorización de Cholessky L y U en función de **a**
c) **(2.0 P)** Resolver los sistemas triangulares para obtener el vector solución

El Profesor

Solución 1

a)

$$P = \frac{R\,T}{V-b} - \frac{a}{V(V+b)+b(V-b)} = 9999.06$$

$$\xi_R = 0.0831$$

$$\xi_T = 0.05$$

$$\xi_a = 0.005$$

$$\xi_b = 0.005$$

$$\xi_V = 0.0017$$

$$\frac{\partial P}{\partial R} = 2402.5$$

$$\frac{\partial P}{\partial T} = 58.8173$$

$$\frac{\partial P}{\partial a} = -27.4233$$

$$\frac{\partial P}{\partial b} = 2.1899x10^5$$

$$\frac{\partial P}{\partial V} = -3.4727x10^4$$

$$\xi_P = \left|\frac{\partial P}{\partial R}\right|\xi_R + \left|\frac{\partial P}{\partial T}\right|\xi_T + \left|\frac{\partial P}{\partial a}\right|\xi_a + \left|\frac{\partial P}{\partial b}\right|\xi_b + \left|\frac{\partial P}{\partial V}\right|\xi_V$$

$$\xi_P = 1356.3$$

$$\delta_P = 13.5647\ \%$$

b)

P=9999.6

10011100001111.0000111101=

$(-1)^{(0)}$ 1.00111000011110000111101x2^{13}=**9999.0596**

13=Ei-127

Ei=140=10001100

N=0 10001100 00111000011110000111101

ERR=0.0004

Solución 2

a)

Localización de raíces:

$$f(\delta) = \frac{2}{3} - 1.34\ \delta\ sen(\delta) - 0.11\ sen(2\ \delta)$$

4 raíces en [-π,$-5\pi/6$] [-π/3,-$\pi/6$] [$\pi/6$,$\pi/3$] [5$\pi/6$,π]

b)

Tomando la raíz en: [$\pi/6$,$\pi/3$]

Bisección

Xi	Xr	Xs
0.5236	0.7854	1.0472
0.5236	0.6545	0.7854

xr=0.6545

c)

Newton-Raphson

$$f'(\delta) = -1.34\ \delta\ \cos(\delta) - 1.34\ \sin(\delta) - 0.22\ \cos(2\ \delta)$$

$$\delta_{N+1} = \delta_N - f(\delta_N)/\ f'(\delta_N)$$

```
x0 =   0.654500000000000
x1 =   0.671402808021056   e =  0.016902808021056
x2 =   0.671299497723342   e =  1.033102977145983e-004
x3 =   0.671299493991799   e =  3.731542963514301e-009
```

d)

```
x=0.6; acum=[x Inf];
for i=1:5
   x1=(2/3-0.11*sin(2*x))/(1.34*sin(x));
   e=abs(x1-x);
   acum=[acum; x1 e];
   x=x1;
end
disp(acum)
if acum(6,2)<acum(5,2)  % error decrece???
   disp('converge')
else
   disp('diverge')
end
```

Solución 3

a)

$k \neq \pm\sqrt{2} \quad Solucion\ unica$

$k = \sqrt{2} \quad Infinitas\ soluciones$

$k = -\sqrt{2} \quad Absurdo$

b)

$$Tg = (D-L)^{-1}U = \begin{bmatrix} 0 & -2/k \\ 0 & 2/k^2 \end{bmatrix}$$

$$\rho(Tg) = \frac{2}{k^2} < 1$$

$$k > \sqrt{2} \quad \wedge \quad k < -\sqrt{2}$$

c)

k=4

$$Tg = (D-L)^{-1}U = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 0 & 0.125 \end{bmatrix}$$

$$Cg = (D-L)^{-1}b = \begin{bmatrix} 0.7071 \\ 0.3232 \end{bmatrix}$$

TOL=0.5x10^{-2}

X1	**x2**	**Err**
0	0	--------
0.7071	0.3232	0.7071
0.5455	0.3636	0.1616
0.5253	0.3687	0.0202
0.5228	0.3693	0.0025

d)

```
acuk=[ ];
for k=[-10:0.1:-0.1,0.1:0.1:10]
    A=[k 2;2 2*k];
    D=diag(diag(A));
    L=D-tril(A);
    U=D-triu(A);
    Tj=inv(D)*(L+U);
    rhoj=max(abs(eig(Tj)));
    if rhoj<1
        acuk=[acuk k];
    end
end
disp(acuk')
```

Solución 4

a)

Por Silvester:

$$\det\left[a^2\right] = a^2 > 0$$

$$\det\begin{bmatrix} a^2 & -a^2 \\ -a^2 & 5a^2 \end{bmatrix} = 6a^4 > 0$$

$$\det\begin{bmatrix} a^2 & -a^2 & a \\ -a^2 & 5a^2 & -2a^2 - a \\ a & -2a^2 - a & 10a^2 + 1 \end{bmatrix} = 36a^6 > 0$$

$$a \in \Re - \{0\}$$

b)

Cholessky:

$$\begin{bmatrix} a^2 & -a^2 & a \\ -a^2 & 5a^2 & -2a^2 - a \\ a & -2a^2 - a & 10a^2 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ -a & 2a & 0 \\ 1 & -a & 3a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -a & 1 \\ 0 & 2a & -a \\ 0 & 0 & 3a \end{bmatrix}$$

c)

Resolviendo los sistemas triangulares:

Sustitución directa:

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ -a & 2a & 0 \\ 1 & -a & 3a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a^2 + a \\ -8a^2 - a \\ 12a^2 + 2a + 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a + 1 \\ -3a \\ 3a \end{bmatrix}$$

Sustitución inversa:

$$\begin{bmatrix} a & -a & 1 \\ 0 & 2a & -a \\ 0 & 0 & 3a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a + 1 \\ -3a \\ 3a \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$