EXAMEN FINAL DE METODOS NUMERICOS (MB536A)

- **DURACION: 110 MINUTOS**
- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO A4**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS YA QUE SE TOMARA EN CUENTA EN LA CALIFICACION**
- **PROHIBIDO PORTAR CELULARES U OTROS EQUIPOS DE COMUNICACIÓN ELECTRONICA**
- **PROHIBIDO EL PRESTAMO DE CALCULADORAS, CORRECTORES, ETC**

Problema 1

Sea el sistema de ecuaciones no lineales:
$$x^2-2x+y^2-6y+1=0$$
$$9x^2-54x+4y^2-8y+49=0$$

a) **(1.0 P)** Bosquejar a mano alzada la solución del sistema y localice las raíces del gráfico, indicando valores cercanos a la raíces, aproximados al entero más próximo.
b) **(2.0 P)** Determine la raíz más alejada del origen de coordenadas usando 2 iteraciones del algoritmo de Newton-Raphson para sistemas y muestre el error, justifique la fórmula de error usada.
c) **(1.0 P)** Encuentre un algoritmo de punto fijo para la raíz más cercana al origen de coordenadas, aplicando el criterio de convergencia.
d) **(1.0 P)** Realice tres iteraciones del algoritmo encontrado en c) a partir del valor inicial dado en a) y muestre el error (el cual debe ser decreciente).

Problema 2

Sea la tabla:

x	1	2	4
y	5	m	17

Donde el polinomio interpolante de Lagrange es:
$$P_2(x)=\frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)}(a+c)+\frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)}(b+c)+\frac{(x-4)(x-2)}{(1-4)(1-2)}(b+a)$$

Si $\mathbf{P_2(3)=12}$:
a) **(2.5 P)** Determine m, a, b y c
b) **(1.0 P)** Estime y’(0.5)
c) **(1.5 P)** Escriba una función MATLAB que a partir de los vectores x e y realice un ajuste por mínimos cuadrados para una función de la forma $y=a*x+b*e^x+c*\cos(x)$ y retorne a, b, c y el factor de regresión r^2.

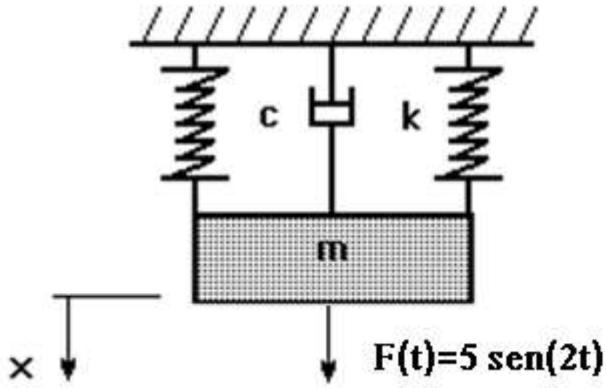
Problema 3

Se desea hallar el área limitada por la parábola $y=x^2/2$ y la curva $y=\dfrac{16}{x^2+4}$:

a) **(1.5 P)** Use la fórmula Simpson 1/3 con n=8 particiones para estimar la integral.
b) **(1.5 P)** Aproxime el área usando la Cuadratura de Gauss con n=3.
c) **(1.0 P)** Estime el error para a) y b) y comente sus resultados
d) **(1.0 P)** Escriba un código MATLAB para la parte a), b) y c).

Problema 4

Considere una ecuación diferencial de segundo orden de un sistema de masa y resorte vibratorio sometido a una fuerza externa senoidal: $m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=5\,sen(2t)$. Las Unidades están en el SI. Las condiciones iniciales son x(0) =1 y x'(0) =0, donde c=4 y m=1 y k=4:



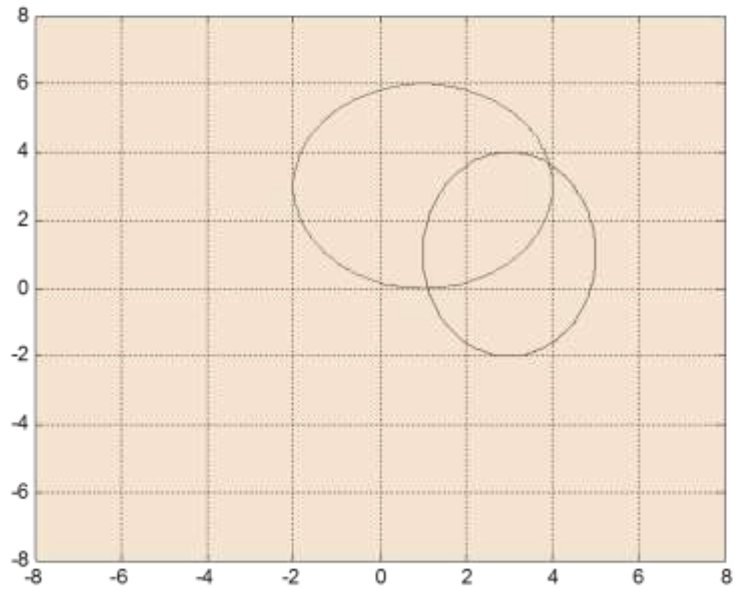
a) **(2.0 P)** Estime la posición y velocidad para t=0.1, usando Taylor 2 con h=0.05
b) **(2.0 P)** Estime la posición y velocidad para t=0.2 seg, usando RK2 con h=0.1
c) **(1.0 P)** Determine los errores para a) y b) y comente sus resultados, si la solución analítica es:

$$x=\frac{13e^{-2t}-5\cos(2t)+26t\,e^{-2t}}{8}$$

El Profesor

Problema 1

a) Localizando las raíces



Existe 2 Raíces cercanas a: (1,0) y (4,4)

b) Método de Newton-Raphson

$x_0 = 4 \quad y_0 = 4$

$$\begin{bmatrix} 2x_0 - 2 & 2y_0 - 6 \\ 18x_0 - 54 & 8y_0 - 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(x_0^2 - 2x_0 + y_{.0}^2 - 6y_0 + 1\right) \\ -\left(9x_0^2 - 54x_0 + 4y_{.0}^2 - 8y_0 + 49\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 18 & 24 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0556 \\ -0.3333 \end{bmatrix}$$

$x_1 = x_0 + \Delta x = 3.9444$
$y_1 = y_0 + \Delta y = 3.6667$
$err = 0.3333$

$x_2 = 3.9269$
$y_2 = 3.6585$
$err = 0.0175$

c) Método de Punto Fijo:

$$x = \frac{9x^2 + 4y^2 - 8y + 49}{54} = g_1(x, y)$$

$$y = \frac{x^2 + y^2 - 2x + 1}{6} = g_2(x, y)$$

Criterio de convergencia:

$$J(x,y)=\begin{bmatrix}\partial g_1/\partial x & \partial g_1/\partial y\\ \partial g_2/\partial x & \partial g_2/\partial y\end{bmatrix}$$

$$J(x_0,y_0)=\begin{bmatrix}x_0/3 & 4y_0/27-4/27\\ x_0/3-1/3 & y_0/3\end{bmatrix}$$

$$J(1,0)=\begin{bmatrix}0.3333 & -0.1481\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\|J(x_0,y_0)\|_\infty = 0.4815 < 1$$

Por lo tanto, habrá convergencia

d) **Aplicando el algoritmo de punto fijo:**

$$x_0 = 1$$

$$y_0 = 0$$

$$x_1 = \frac{9x_0^2 + 4y_0^2 - 8y_0 + 49}{54} = 1.0741$$

$$y_1 = \frac{x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 + 1}{6} = 0$$

$$err = 0.0741$$

x	**y**	**Err**
1	0	------
1.0741	0	0.0741
1.0997	0.0009	0.0256
1.1088	0.0017	0.0091

Converge a la raíz más cercana al origen de coordenadas.

Problema 2

a) Aplicando las condiciones del problema:

m=8
c=10
b=7
a=-2

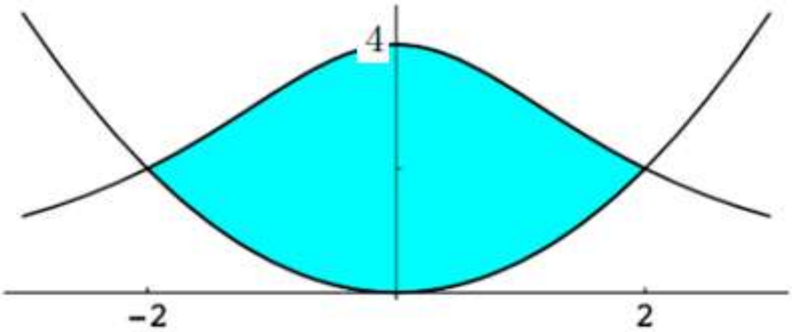
b) Reemplazando en el polinomio de Lagrange y simplificando:

p(x)=0.5*x^2+1.5*x+3
p'(x)=x+1.5
p'(0.5)=2

c) Aplicando la ecuación normal:

```
% ajusta.m
function [a,b,c,r2]=ajusta(x,y)
x=x'; y=y'; % convirtiendo a columna
M=[x exp(x) cos(x)];
N=M'*M;
L=M'*y;
p=N\L;
a=p(1); b=p(2), c=p(3)
ym=mean(y)
ys=a*x+b*exp(x)+c*cos(x);
r2=sum((ys-ym).^2)/sum((y-ym).^2);
```

Problema 3



$$Area = \int_{-2}^{2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{16}{x^2+4} \right) dx$$

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{16}{x^2+4}$$

a) Simpson 1/3

```
h=1/2
I1=1/3*h*(f(-2)+4*f(-1.5)+2*f(-1)+
+4*f(-0.5)+2*f(0)+4*f(0.5)+2*f(1)+4*f(1.5)+f(2))
I1=9.899607843137256
```

b) Cuadratura de Gauss (N=3)

```
x=2t
dx=2dt
```

$$Area = \int_{-1}^{1} \left(\frac{(2t)^2}{2} - \frac{16}{(2t)^2+4} \right) 2dt$$

$$F(t) = \left(\frac{(2t)^2}{2} - \frac{16}{(2t)^2+4} \right) 2$$

```
De tablas:
t1=-0.774596669241483
t2=0.0
t3=+0.774596669241483
c1=0.555555555555556
c2=0.888888888888889
c3=0.555555555555556
I2=c1*F(t1)+c2*F(t2)+c3*F(t3)
```
I2=10.000000000000009

c) Cálculo de errores:

$$Area = \int_{-2}^{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{16}{x^2+4}\right)dx = 4\pi - \frac{8}{3} = 9.899703947692506$$ %

Simpson 1/3

I1 = 9.899607843137256

e1 = 9.610455525077555e-005

Gauss (N=3)

I2 = 10.000000000000009

e2 = 0.100296052307502

d) Programa MATLAB

```
clear all
format long
syms x
F=16/(x*x+4)-x^2/2
Ie=int(F,-2,2)
Ie=double(Ie)
% Simpson 1/3, n=8
f=inline('16/(x*x+4)-x^2/2')
h=4/8
I1=1/3*h*(f(-2)+4*f(-1.5)+2*f(-1)+
+4*f(-0.5)+2*f(0)+4*f(0.5)+2*f(1)+4*f(1.5)+f(2))
e1=abs(I1-Ie)
% Gauss
% x=(t*2)  dx=dt*2
ff=inline('2*(16/((t*2)^2+4)-(t*2)^2/2)')
x1=-0.774596669241483; x2=0.0; x3=+0.774596669241483;
c1=0.555555555555556; c2=0.888888888888889; c3=0.555555555555556;
I3=c1*ff(x1)+c2*ff(x2)+c3*ff(x3)
err3=abs(Ie-I3)
```

Problema 4

a) Taylor de orden 2:

$$x''+4x'+4x = 5\,sen(2t)$$

$$x(0)=1 \quad x'(0)=0$$

Reduciendo a primer orden:

$x' = v \quad x(0) = 1$

$v' = 5\sin(2t) - 4v - 4x \quad v(0) = 0$

Taylor 2 de segundo orden:

$t_0 = 0$

$x_0 = 1$

$v_0 = 0$

$h = 0.05$

$t_{n+1} = t_n + h$

$$x_{n+1} = x_n + h * v_n + \frac{h^2}{2} * (5\sin(2t_n) - 4v_n - 4x_n)$$

$$v_{n+1} = v_n + h * (5\sin(2t_n) - 4v_n - 4x_n) + \frac{h^2}{2} * (10\cos(2t_n) - 4(5\sin(2t_n) - 4v_n - 4x_n) - 4v_n)$$

t	x	v
0	1	0
0.05	0.995	-0.167500000000000
0.1	0.983111458854043	-0.280712429188488

b) Runge-Kutta de orden 2:

$t_0 = 0$

$x_0 = 1$

$v_0 = 0$

$h = 0.1$

$t_{n+1} = t_n + h$

$k_1 = h * v_n$

$l_1 = h * (5\sin(2t_n) - 4v_n - 4x_n)$

$k_2 = h * (v_n + l_1)$

$l_2 = h * (5\sin(2(t_n + h)) - 4(v_n + l_1) - 4(x_n + k_1))$

$x_{n+1} = x_n + 1/2 * (k_1 + k_2)$

$v_{n+1} = v_n + 1/2 * (l_1 + l_2)$

t	x	v
0	1	0
0.1	0.98	-0.270332667301235
0.2	0.943740119885778	-0.364864575222393

c) Errores

Taylor de orden 2

t	X(Taylor 2)	X(Exacto)	error
0	1	1	0
0.05	0.995	0.995519281440512	0.000519281440512
0.1	0.983111458854043	0.983983357351288	0.000871898497245

Runge-Kutta 2

t	X(RK2)	X(Exacto)	error
0	1	1	0
0.1	0.98	0.983983357351288	0.003983357351288
0.2	0.943740119885778	0.949314983479276	0.005574863593498

El método de Taylor de orden 2 con h=0.05 es más preciso que RK2 con h=0.1